Racionalidad económica implícita en teoría financiera

FRANCISCO VENEGAS-MARTÍNEZ[1]

■ **Resumen**: Este trabajo de investigación muestra que los principios financieros más importantes llevan consigo de manera implícita el postulado de racionalidad económica. Para ello, el modelo de Black-Scholes-Merton (BSM) que determina el precio de un producto derivado se obtiene bajo los principios financieros más conocidos, tales como: condiciones de no arbitraje, coberturas, el modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model), portafolios replicantes y auto-financiables, valuación con VPN (Valor Presente Neto), el modelo de Markowitz y el teorema de Modigliani-Miller, entre otros. Posteriormente se obtienen los mismos resultados del modelo BSM utilizando un consumidor-inversionista maximizador de utilidad, sujeto a una restricción presupuestal que considera la posibilidad de integrar, en un portafolio, un bono libre de riesgo, un activo riesgoso y un producto derivado sobre dicho activo, lo que confirma la consistencia de tales principios financieros con la racionalidad económica; es decir, la teoría financiera es implícitamente consistente con el supuesto de racionalidad económica.

■ **Abstract**: The purpose of this paper is to show that the most important financial principles carry implicitly with them the postulate of economic rationality. To do this, the Black-Scholes-Merton (BSM) model that determines the price of a contingent claim is obtained by using the most common financial principles, such as: no arbitrage conditions, hedging, CAPM (Capital Asset Pricing Model), replicating and self-financing portfolios, valuing with NPV (Net Present Value), the Markowitz model, and the Modigliani-Miller theorem, among others. Subsequently, the same results of the BSM model are obtained by using a rational consumer-investor that maximizes utility subject to a budget constraint that considers the possibility of integrating a portfolio with a non-risky bond, a risky asset, and a derivative on such an asset, which confirms the consistency between

[1] Profesor-Investigador de la Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional, correo electrónico: fvenegaslll1@yahoo.com.mx.

such financial principles and economic rationality, that is, financial theory is implicitly consistent with the assumption of economic rationality.

■ **Palabras clave:** Productos derivados, portafolios, comportamiento del consumidor

■ **Clasificación JEL**: G11, G13, D1

■ *Introducción*

La naturaleza optimiza. Los sistemas físicos de partículas tienden a estados en donde la "acción" (diferencia entre energía cinética y potencial por unidad de tiempo) es mínima. Las reacciones entre las moléculas de los sistemas químicos se llevan a cabo de tal forma que la energía (potencial) de los electrones es mínima. Los rayos de luz siguen trayectorias que minimizan su tiempo de viaje. La naturaleza también optimiza cuando selecciona a los individuos más aptos para sobrevivir en ambientes competitivos y bajo condiciones adversas, conduciéndolos en el largo plazo hacia un proceso evolutivo. A la luz de estos hechos, un cuestionamiento casi inevitable, que ha sido planteado desde hace mucho tiempo, es si el ser humano (*homo sapiens sapiens*) actúa de tal forma que siempre optimiza en su propio interés.[2] En teoría económica, este asunto cobra suma importancia sobre todo en lo que se refiere al estudio del comportamiento de consumidores y empresas. El ser humano, en su periodo de vida, transita sucesivamente por tres fases fundamentales: el instinto, la razón y la conciencia. El proceso de optimización estaría, por supuesto, incluido en la razón. Es evidente que las otras especies animales (no racionales) transitan sólo por la fase del instinto y, en su caso, la optimización no la llevan a cabo los individuos de dichas especies, sino la naturaleza misma. Este hecho es el fundamento de la teoría de juegos evolutivos. El asunto referente a la fase de conciencia o consciencia en los seres humanos consiste en ver más allá de la realidad parcial que recogen los sentidos físicos y psicológicos y se impregna, por supuesto, de discusiones filosóficas, lo

2 Una versión menos egoísta es que el ser humano, visto como padre de familia, optimiza en el interés de todos sus descendientes. Aunque, entre el 50 mil y el 40 mil antes de Nuestra Era (fecha aproximada de los restos de los primeros miembros), muy probablemente, el ser humano optimizaba en el interés de toda la comunidad a la que pertenecía, en una cierta clase de juego cooperativo.

cual está más allá de los objetivos del presente trabajo y, en consecuencia, se deja de lado.

El postulado de racionalidad económica en teoría económica ha sido, desde hace mucho tiempo, un asunto de continuo debate sobre el comportamiento individual de los agentes (consumidores, empresas, gobierno, etc.). Cuando se dice que un consumidor plantea y resuelve problemas de optimización a través de un proceso "interno", se entiende que lo hace desde el cerebro; sería difícil pensar que lo pudiera hacer desde cualquier otro órgano. No ha sido fácil aceptar que los consumidores cuando toman decisiones de consumo y portafolio lo hagan de tal manera que maximizan su satisfacción sujetos a su restricción presupuestal, ya que el planteamiento de problemas de optimización requiere de un proceso complejo de abstracción, esto sin mencionar que dichos problemas tienen que resolverse de manera instantánea. Peor aún, si el proceso de decisión se realiza en un ambiente de riesgo e incertidumbre, entonces el planteamiento y la resolución de los problemas de optimización requieren de técnicas y herramientas muy sofisticadas y, en consecuencia, la estructura mental del agente tendría que ser la de un doctor en matemáticas; de hecho, no cualquier doctor en matemáticas tendría que ser un doctor en programación matemática estocástica (nadie más podría abordar dicho problema razonablemente). Evidentemente, individuos con poca o sin escolaridad (incluyendo infantes en los que todavía predomina el instinto con exigua razón) no podrían plantear, ni mucho menos resolver un problema de optimización desde su cerebro. De esta manera, para ser un consumidor racional se requiere de ciertas habilidades analíticas que pocos individuos tienen (pues se adquieren con estudios universitarios en ciertas áreas de las matemáticas) y, aun cuando las tuvieran, no existe evidencia de que las apliquen, de manera precisa e instantánea, en procesos de toma de decisiones de consumo y/o portafolio.

Desde hace muchas décadas, varios intentos se han realizado para relajar el concepto de racionalidad económica perfecta (o hiper-racionalidad). Uno de los intentos más importantes se refiere al trabajo pionero de Herbert Simon (1957), quien ya planteaba la noción de racionalidad limitada (o acotada) en la que, primero, el individuo elige una función de utilidad entre un conjunto de funciones disponibles en su cerebro y, posteriormente, ordena en términos de sus preferencias las posibles alternativas siguiendo un proceso que no es tan "fino" como el que exigirían las condiciones de primer orden de un problema de optimización estocástico, siendo el ordenamiento de alternativas más bien un proceso "burdo" en el sentido de que revisa grupos de alternativas y elige, casi instantáneamente, aquéllas que pudieran estar "cerca" del óptimo. Por otro lado, la "economía experimental" ha mostrado un avance impresionante, desde el trabajo seminal de Vernon Smith (1962), revelando con experimentos conducidos la ausencia de un comportamiento racional "perfecto" en los agentes. Por lo anterior se podría decir que la racionalidad económica "perfecta" es un postulado falso, aun cuando existieran buenas aproximaciones. Por supuesto, no todas las corrientes del pensamiento económico requieren de este postulado para su desarrollo. Por ejemplo, la economía Keynesiana no comulga con el comportamiento racional, la nueva economía Keynesiana hace un intento por incluirlo y para la nueva escuela clásica (nueva macroeconomía clásica) es esencial.

El partir de postulados falsos para desarrollar una teoría no necesariamente es un problema. Por ejemplo, la mecánica clásica se basa en tres postulados (las tres leyes de Isaac Newton (1643-1727)). Sin embargo, el primer postulado conduce a la existencia de sistemas inerciales y tales sistemas no se encuentran en el universo (*i.e.,* no existen puntos fijos en el universo[3]), aunque haya buenas aproximaciones (estrellas lejanas que sirvan como puntos de referencia). En este caso, aun cuando se parte de un postulado falso, los resultados que se desprenden de él sí describen y explican muchos fenómenos naturales; evidentemente, la mecánica clásica es uno de los pilares de la física y la ingeniería. En consecuencia, la primera ley de Newton, aunque falsa, es "conveniente" para el desarrollo "adecuado" de gran parte de la física (la física clásica). Otro ejemplo similar es el postulado de la inexistencia de monopolos magnéticos, el cual sirve para establecer una de las ecuaciones de James Clerk Maxwell (1831-1879) del electromagnetismo (electrodinámica clásica). De este postulado no se sabe, hasta la fecha, si es falso o no (podrían existir monopolos en otra parte del universo); sin embargo, se sabe que el postulado es conveniente para el desarrollo adecuado de la teoría electrodinámica clásica, la cual constituye otro de los pilares sobre los que descansan la física y la ingeniería. El caso del electromagnetismo comparado con el de la mecánica es todavía más crítico, ya que en este último por lo menos se tiene la certeza de que uno de sus postulados es falso, mientras que en electrodinámica ni siquiera se sabe si el postulado en cuestión es cierto.

Este trabajo de investigación muestra que los principios financieros más importantes llevan consigo de manera implícita el postulado de racionalidad económica, lo que vuelve a traer al centro de la discusión

---

3 Si el universo se encuentra en constante expansión, no pueden existir puntos fijos.

la aceptación o no de dicho postulado o de cualquiera de sus formas relajadas. Para ello se lleva a cabo el siguiente experimento. La ecuación diferencial parcial (EDP) lineal de segundo grado de Black-Scholes-Merton (BSM), cuya solución determina el precio de un producto derivado, se obtiene bajo diferentes principios financieros tales como: condiciones de no arbitraje, cobertura de la riqueza, el modelo CAPM, portafolios replicantes y autofinanciables, valor presente neto (VPN), el modelo de Markowitz y Sharpe, y el teorema de Modigliani-Miller (MM). Posteriormente, se obtiene "exactamente" la misma ecuación utilizando el postulado de racionalidad económica: un consumidor-inversionista maximizador de utilidad sujeto a una restricción presupuestal que considera la posibilidad de integrar un portafolio con un bono libre de riesgo (de incumplimiento), un activo riesgoso (una acción) y un producto derivado (una opción) sobre dicho activo. De lo anterior se puede deducir que el postulado de racionalidad económica es consistente con los resultados que se obtienen de la aplicación de los principios fundamentales que se utilizan en la teoría y práctica financiera, lo que confirma que la teoría financiera es implícitamente consistente con la racionalidad económica, situación que revive la controversia sobre el postulado en cuestión.

Es importante destacar que esta investigación toma como punto de partida los trabajos de: Black y Scholes (1973) sobre valuación de derivados; Markowitz (1952) acerca de la construcción de portafolios; Sharpe (1964) sobre valuación de acciones; Modigliani y Miller (1958) acerca de la estructura de capital de las empresas; Merton (1969), (1971) y (1973) sobre modelos estocásticos de consumidores racionales en tiempo continuo; y (2001), (2005), (2006a), (2006b), (2007), (2007b), (2007c) y (2008) acerca de decisiones de consumo y portafolio (incluyendo derivados) en ambientes de riesgo e incertidumbre.

El trabajo está organizado como sigue. En la sección 2 se obtiene la EDP de BSM utilizando condiciones de no arbitraje. En esta sección se lleva a cabo un análisis detallado y riguroso sobre el modelo de BSM, ya que éste es central para el desarrollo de la presente investigación. En el transcurso de la sección 3 se deriva la EDP de BSM mediante la condición de cobertura de la riqueza. A través de la sección 4 se genera la EDP de BSM mediante el uso del modelo CAPM. En la sección 5 se obtiene la EDP de BSM por medio del uso de portafolios replicantes y autofinanciables. En la sección 6 se reproduce la solución de la ecuación de BSM mediante el método del valor presente neto. En el transcurso de la sección 7 obtiene la ecuación BSM con base en el modelo de Markowitz. En la sección 8 se presenta la relación entre la ecuación BSM y el teorema de Modigliani-Miller. En la sección 9, con el fin de mostrar que los principios financieros más importantes llevan consigo de manera implícita la noción de racionalidad económica, se obtiene la ecuación BSM bajo el supuesto de que existen consumidores-inversionistas que maximizan utilidad sujetos a su restricción presupuestal. Por último, en la sección 10 se presentan las conclusiones, así como las limitaciones y sugerencias para futuras investigaciones.

■ *Obtención de la ecuación diferencial parcial de BSM mediante condiciones de no arbitraje*

En 1973, Fischer Black y Myron Scholes y, de manera independiente, Robert Merton, desarrollaron, bajo el supuesto de ausencia de oportunidades de arbitraje (ley de un solo precio), un modelo para valuar una opción europea cuando el precio del activo subyacente es conducido por un movimiento geométrico Browniano (rendimientos normales con media y varianza escaladas por el tiempo). Una situación anecdótica relacionada con el trabajo de investigación de Fischer Black y Myron Scholes es que fue rechazado, primero, en 1970, por "The Journal of Political Economy (JPE)" de la Universidad de Chicago y, posteriormente, en 1971, por "The Review of Economics and Statistics" de la Universidad de Harvard. No obstante, después de incorporar varias recomendaciones sugeridas por Merton Miller y Eugene Fama, incluyendo el cambio del título tres veces de "A theoretical Valuation Formula for Options, Warrants and Other Securities" a "Capital Market Equilibrium and the Pricing of Corporate Liabilities" y, finalmente, a "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", el trabajo fue reconsiderado y, finalmente, aceptado por el "JPE" para ser publicado en 1973. El trabajo de Robert Merton, "Theory of Rational Option Pricing", fue aceptado casi inmediatamente y publicado, también en 1973, en el "Bell Journal of Economics and Management Science". Felizmente, 24 años después, en 1997, Robert Merton y Myron Scholes son laureados con el premio Nobel de economía; lamentablemente, el destacado matemático y economista Fischer Black había fallecido dos años antes.

El modelo BSM ha fomentado de manera importante que los participantes en los mercados financieros se cubran, conveniente y oportunamente, contra los diversos riesgos a que están expuestos. También ha desempeñado un papel central en el avance tan impresionante que ha tenido la economía financiera y las matemáticas financieras modernas. Ante todo esto es importante destacar que el modelo BSM puede ser empleado como herramienta para generar ganancias de millones de dólares en periodos cortos (unas semanas), pero también, si no se utiliza adecuadamente, puede generar pérdidas astronómicas en periodos aún más cortos (unos días). La importancia práctica del modelo BSM radica en que su aparición es casi simultánea con el arranque de la bolsa de opciones "Chicago Board of Options Exchange", el cual ha operado, a la fecha, billones de dólares.

Asimismo, la aparición del modelo BSM, aunado al asombroso avance de las tecnologías de información y a la sorprendente aparición de decenas y decenas de nuevas revistas de investigación en matemáticas financieras y administración de riesgos, obliga a reconocer la gran importancia de la contribución de Black, Scholes y Merton a la teoría, pero sobre todo a la práctica financiera.

Antes de escribir cualquier ecuación es imprescindible establecer los supuestos básicos del modelo clásico de Black-Scholes-Merton, a saber:

i. El activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato.

ii. El precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico Browniano, es decir, los rendimientos son normales con media y varianza escaladas por el tiempo.

iii. La volatilidad del precio del activo subyacente se mantiene constante a través del tiempo.

iv. Las ventas en corto del subyacente en cuestión son permitidas, es decir, se puede pedir prestado el activo para venderlo en el presente y hacer uso del efectivo y, posteriormente, cuando se tiene que devolver el activo, se recompra (si es posible) a un precio menor a fin de generar alguna ganancia.

v. El mercado del subyacente es líquido y divisible, es decir, el subyacente siempre se puede comprar y vender en cualquier fracción de unidad.

vi. No hay costos de transacción (comisiones e impuestos).

vii. El mercado opera en forma continua, es decir, no hay fines de semana ni días festivos.

viii. Existe un mercado de crédito o un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante a todos los plazos y libre de riesgo de incumplimiento.

ix. No existen oportunidades de arbitraje, es decir, no es posible generar ganancias libres de riesgo; aunque se podría suponer equilibrio general, lo cual ciertamente lleva a que no existan oportunidades de arbitraje.

Por supuesto, existen en la literatura especializada cientos de generalizaciones que extienden en varias direcciones el modelo anterior: ver, por ejemplo, las referencias contenidas en Venegas-Martínez (2007). No obstante, la presente investigación se sujetará al modelo clásico para que la discusión sobre el asunto de racionalidad económica se mantenga lo más sencilla posible.

Dinámica del precio del subyacente y riesgo de Mercado

Una vez que se han establecido los supuestos básicos del modelo de BSM, se introducen ahora los aspectos técnicos necesarios para la construcción del mismo. Considere un movimiento Browniano $(W_t)_{t\varepsilon[0,T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $(\Omega, F, (F_t^W)_{t\in[0,T]}, P)$. En este caso, el espacio medible en cuestión es

$(\Omega, F) := (R, B(R))$ donde $B(R)$ es la σ -álgebra estándar de Borel sobre $\mathbb{R}$ (los números reales). La medida de probabilidad satisface

$$\mathrm{dP}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{\frac{w^2}{2t}\right\} \mathrm{d}w.$$

La filtración $(F_t^W)_{t\in[0,T]}$ es una familia de σ -álgebras tales que $F_t \subset F$ para toda t. Esta familia es creciente en el sentido de que $F_s \subset F_t$ cuando $s \leq t$. Así, una filtración puede ser vista como una estructura de información dinámica y F_t representa la información disponible al tiempo t. El hecho de que la filtración esté aumentando significa que hay más y más información conocida conforme el tiempo transcurre y que la información pasada no se olvida. Se cumple además que W_t tiene incrementos independientes normales con medias cero y varianzas iguales a los incrementos en el tiempo. Al tiempo $t = 0$, se define $W_0 = 0$. El proceso dW_t modela las fluctuaciones propias de los rendimientos del subyacente y, como se sabe, satisface: $dW_t \sim N(0, dt)$, E $[dW_t] = 0$ y Var $[dW_t]$ = E $[(dW_t)^2 = dt$. Se supone que el precio del activo subyacente al tiempo t, S_t es conducido por el movimiento geométrico Browniano

$$\mathrm{d}S_t = \mu\, S_t \mathrm{d}t + \sigma\, S_t \mathrm{d}W_t. \tag{1}$$

En este caso, el parámetro de tendencia, $\mu \in \mathbb{R}$, representa el rendimiento medio esperado y $\sigma > 0$ es la volatilidad (anualizada). El proceso $\{S_t\}_{t\geq 0}$ es adaptado a la filtración $\{F_t\}_{t\geq 0}$ En efecto, una simple aplicación del lema de Itô (véase, por ejemplo, Venegas-Martínez (2007)) conduce a

$$\mathrm{d}\ln(S_t)=\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}t+\sigma\, dW_t$$

lo que, a su vez, implica

$$S_t=S_0e^{\sigma W_t+\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t}.$$

Es decir, la expresión anterior es invertible, en el sentido que se puede despejar W_t . Por lo tanto,

$$F_t^W=\sigma\left(W_t\middle| s\le t\right)=\sigma\left(S_t\middle| s\le t\right)=F_t^S,$$

esto significa que el proceso $\{S_t\}_{t\geq 0}$ es adaptado a la filtración $\{F_t\}_{t\geq 0}$. Por último, es importante recordar que (1) es una notación simplificada para la expresión

$$S_t=S_0+\mu\int_0^t S_u\mathrm{d}u+\sigma\int_0^t S_u\mathrm{d}W_u,\quad t\in[0,T],$$

ya que el objetivo de estudio del cálculo estocástico es la integral estocástica (véase, por ejemplo, Venegas-Martínez (2007)).

Dinámica del precio de la opción

El valor, prima o precio de una opción europea de compra es claramente función de los distintos parámetros que intervienen en los términos o cláusulas del contrato, tales como: el precio de ejercicio K y la vida del contrato $T — t$, donde T es la fecha de vencimiento y t es la fecha de inicio del contrato. Por supuesto, el valor de dicha opción también dependerá de las características del activo subyacente, tales como: su precio, S_t, rendimiento medio esperado, μ, y volatilidad, σ, así como de la tasa de interés, r, que prevalece en el mercado de crédito a fin de calcular el valor del dinero en el tiempo. Por lo anterior, se puede escribir el valor de una opción europea como

(2) $$c=c(S_t,t;K,T,\sigma,\mu,r).$$

Observe que S_t y t son las variables relevantes en el contrato. En lo que sigue no se hará mención explícita de los parámetros, T, K, r y σ, excepto cuando sea necesario. Es decir, el valor de la opción se denotará simplemente como $c = c\ (S_t,t)$.

Durante el intervalo de tiempo $[t, t + \mathrm{d}t]$, el activo subyacente cambia de S_t a $S_t + \mathrm{d}S_t$, en consecuencia, el precio de la opción cambia de c a

$c + \mathrm{d}c$. El cambio marginal en el precio de la opción se obtiene mediante el lema de Itô, como:

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{d}c = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \mu\, S_t + \frac{1}{2} \sigma^{\,2} S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) \mathrm{d}t + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma\, S_t \mathrm{d}W_t.$$

Dinámica de un portafolio combinado
del subyacente y su opción de compra

Considere ahora un portafolio con ω_1 unidades del activo subyacente de precio S_t y ω_2 unidades de una opción de compra sobre el subyacente de precio $c\,(S_t,t)$. Si Π_t denota el valor actual, al tiempo t, del portafolio, entonces

$$\text{(4)} \qquad \Pi_t = \omega_1 S_t + \omega_2\, c\left(S_t, t\right).$$

El cambio en el valor del portafolio, durante el instante $\mathrm{d}t$, debido a fluctuaciones propias del mercado está dado por

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{d}\Pi_t = \omega_1 \mathrm{d}S_t + \omega_2 \mathrm{d}c$$

Después de sustituir (1) y (3) en (5), se obtiene la siguiente expresión para el cambio marginal en el valor del portafolio:

$$\text{(6)} \quad \mathrm{d}\Pi_t = \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \mu\, S_t \mathrm{d}t + \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \sigma\, S_t \mathrm{d}W_t + \omega_2 \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2\, S_t^2 \right) \mathrm{d}t.$$

La ecuación (6) contiene dos tipos de términos. Los términos de tendencia, multiplicados por $\mathrm{d}t$, y el término aleatorio, multiplicado por $\mathrm{d}W_t$. Este último modela el riesgo de mercado del portafolio, el cual se puede eliminar si se eligen, adecuadamente, las cantidades de ω_1 y ω_2 en la conformación del portafolio.

Administración del riesgo de mercado

A fin de eliminar el riesgo de mercado del portafolio se deben seleccionar ω_1 y ω_2 de tal manera que se anule el coeficiente de $\mathrm{d}W_t$ en el término estocástico de la ecuación (6), es decir,

$$\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} = 0.$$

Claramente existen infinitas posibilidades de seleccionar ω_1 y ω_2 para lograr el objetivo. Si, por ejemplo, se toman $\omega_2 = 1$ y $\omega_1 = -\partial c / \partial S_t := -\Delta$ se tiene que

$$\mathrm{d}\Pi_t^{(\Delta)} = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \mathrm{d}t. \tag{7}$$

Es usual referirse a esta elección particular de $\omega_2 = 1$ y $\omega_1 = -\Delta$ como cobertura Delta. Esta estrategia de cobertura perfecta es dinámica, ya que durante el periodo $[t, t + \mathrm{d}t]$, la cantidad $\partial c / \partial S_t$ cambia con S_t y t. Claramente, la cobertura Delta es aplicable sólo durante el instante $\mathrm{d}t$. De otra manera, al transcurrir el tiempo, la cobertura se deteriora paulatinamente perdiendo su efectividad. Ahora bien, si se emplea esta cobertura en (4), se obtiene

$$\Pi_t^{(\Delta)} = c - \Delta S_t,$$

lo cual significa que está cubriendo una venta en corto de Δ unidades del subyacente con una opción de compra sobre una acción.

Cuenta bancaria

Se supone que existe un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar o pedir prestado a una tasa constante, r, a todos los plazos y, en consecuencia, libre de riesgo de mercado, la cual se aplica en forma continuamente capitalizable. Se supone que este mercado de crédito es libre de riesgo de incumplimiento. Si un agente deposita b_0 unidades monetarias, entonces el saldo en su cuenta bancaria, al tiempo t, está dada por:

$$b_t = b_0 e^{rt}.$$

De esta manera, los intereses que se suman a su cuenta son

$$\mathrm{d}b_t = r b_t \mathrm{d}t.$$

Inversión alternativa del valor del portafolio

Bajo la elección $\omega_2 = 1$ y $\omega_1 = -\Delta$, el valor del portafolio resultante es $\Pi_t^{(\Delta)} = c - \Delta S_t$. Si esta cantidad se deposita en un banco que paga una tasa de interés r, entonces el cambio marginal en el valor del portafolio (los intereses), durante $\mathrm{d}t$, es

$$\mathrm{d}\Pi_t^{(r)} = \Pi_t^{(\Delta)} r \mathrm{d}t = (c - \Delta S_t) r \mathrm{d}t. \tag{8}$$

En este caso, $\mathrm{d}t$ es el tiempo en el que se aplica la tasa r.

Condiciones de no arbitraje

Bajo el supuesto de no arbitraje, cualesquiera dos alternativas de inversión generan exactamente el mismo rendimiento. De esta manera,

$$\mathrm{d}\Pi_t^{(\Delta)} = \mathrm{d}\Pi_t^{(r)}. \tag{9}$$

En efecto, si la tasa de rendimiento del portafolio combinado fuera más grande que el interés que paga el banco, entonces se pediría prestado, en t, al banco, la cantidad $-\Delta S_t + c$ para invertir en el portafolio de acciones y opciones. Posteriormente, en $t + \mathrm{d}t$ se le pagan al banco los intereses más el capital y el restante representa una ganancia libre de riesgo. Por otro lado, si el rendimiento del portafolio fuera menor que el interés que paga el banco, entonces se debe invertir el dinero en el banco, pues la aplicación de una cobertura Delta carece de sentido.

Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes-Merton

En esta sección se obtiene una de las ecuaciones más importantes de la teoría financiera moderna, la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes-Merton (BSM), cuya solución determina el precio de una opción europea de compra. De hecho, cualquier producto derivado de S_t satisface la ecuación de BSM. Observe que una forma alternativa de escribir (9) es

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\right)\mathrm{d}t = \left(-\frac{\partial c}{\partial S_t} S_t + c\right) r\,\mathrm{d}t. \tag{10}$$

Equivalentemente,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t r - rc = 0, \tag{11}$$

la cual es conocida como la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes-Merton. Las condiciones de frontera y final para determinar una solución única están dadas, respectivamente, por

$$c(0,t) = 0 \qquad \text{y} \qquad c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0),$$

donde K es el precio de ejercicio de la opción. La ecuación (11) es una ecuación diferencial parcial lineal parabólica. De hecho, casi todas las ecuaciones diferenciales parciales en matemáticas financieras tienen una forma similar. La linealidad significa que si se tienen dos soluciones, entonces la suma de ellas también es una solución. En otras palabras, si todos los activos de un portafolio satisfacen la ecuación (11), entonces el portafolio también la satisface. Por último, el hecho de que la ecuación diferencial parcial sea parabólica significa que está relacionada con la ecuación de difusión de calor, esto es, con una ecuación de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u=u(x,\tau) \quad -\infty<x<\infty, \quad \tau>0,$$

junto con la condición

$$u(x,0)=u_0(x).$$

La ecuación de Black-Scholes-Merton contiene todas las variables que determinan el valor del contrato y los parámetros tales como el precio de contado del activo subyacente, el tiempo y la volatilidad, pero no se hace mención al rendimiento medio esperado μ. Cualquier dependencia sobre μ se ha eliminado al anular el coeficiente de $\mathrm{d}W_t$ en el cambio de valor del portafolio. Observe que en su lugar aparece, en la ecuación (11), la tasa de interés libre de riesgo r. Esto significa que si todos los participantes en el mercado de opciones están de acuerdo con el nivel de volatilidad de los rendimientos del activo, entonces están igualmente de acuerdo con el valor de la opción aunque tengan diferentes preferencias al riesgo expresadas a través de μ. En otras palabras, todos los agentes están dispuestos a omitir sus preferencias al riesgo, μ, y aceptar un rendimiento libre de riesgo, r, después de ponerse de acuerdo con el nivel de volatilidad del activo subyacente.

Mercados completos

En esta sección se presenta, de manera intuitiva, el concepto de mercados completos, el cual consiste en la posibilidad de replicar el precio de una opción a través del valor de un portafolio de acciones y efectivo. Observe primero que a partir de la ecuación (8), se cumple que

$$\Delta S_t+\frac{1}{r}\;\frac{1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\prod\nolimits_t^{(r)} \;=c. \tag{12}$$

Si se escribe $b_t=\prod_t^{(r)}$, entonces $\mathrm{d}\prod_t^{(r)}=\mathrm{d}b_t=rb_t\mathrm{d}t$, lo cual implica que

$$\frac{1}{r\mathrm{d}t}\mathrm{d}\prod_t^{(r)}=b_t.$$

Por lo tanto, (12) se transforma en

$$\Delta S_t + b_t = c,$$

es decir, si se diseña un portafolio que tiene acciones, en una cantidad Δ, y efectivo b_t, entonces se puede replicar el precio de la opción.

■ *Derivación de la ecuación diferencial parcial de BSM mediante la cobertura de la riqueza*

Suponga que un inversionista comienza con un cierto nivel de riqueza, A_0, e invierte una cantidad Δ_t en un activo con riesgo, de precio S_t, y el resto en otro activo que paga una tasa de interés constante, r, a todos los plazos y libre de riesgo de incumplimiento, de tal manera que la dinámica de acumulación de su riqueza queda representada por

$$\mathrm{d}A_t=\Delta_t\mathrm{d}S_t+r\left[A_t-\Delta_t S_t\right]\mathrm{d}t.$$

Es decir,
$$\begin{aligned}\mathrm{d}A_t&=\Delta_t\left(\mu S_t\mathrm{d}t+\sigma S_t\mathrm{dW}_t\right)+r\left[A_t-\Delta_t S_t\right]\mathrm{d}t\\&=\left[rA_t+\Delta_t S_t\left(\mu-r\right)\right]\mathrm{d}t+\Delta_t\sigma S_t\mathrm{dW}_t.\end{aligned}$$

Sea $c\left(S_t,t\right)$ el precio de una opción europea de compra que paga en la fecha de vencimiento $\max\left(S_T-K,0\right)$, entonces el lema de Itô conduce a

$$\mathrm{d}c=\left(\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial S_t}S_t\mu+\tfrac{1}{2}\sigma^2S_t^2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\right)\mathrm{d}t+\frac{\partial c}{\partial S_t}S_t\sigma\,\mathrm{dW}_t.$$

Si se desea cubrir el portafolio con una opción de tal manera que $c\left(S_t,t\right)=A_t$ para toda t, entonces $\mathrm{d}c=\mathrm{d}A_t$. Después de igualar términos estocásticos y deterministas se encuentra que

Es decir, $$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial S_t}S_t\mu+\tfrac{1}{2}\sigma^2S_t^2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}=rA_t+\frac{\partial c}{\partial S_t}S_t(\mu-r).$$

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial S_t}S_tr+\tfrac{1}{2}\sigma^2S_t^2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}-rc=0,$$

junto con la condición

$$c(S_t,T)=\max(S_t-K,0).$$

■ *Obtención de la ecuación de BSM mediante argumentos del modelo CAPM*

A continuación se obtiene la ecuación de BSM utilizando el modelo CAPM. El modelo CAPM describe la relación entre el riesgo y el rendimiento esperado de un activo bajo condiciones de equilibrio de mercado, y se utiliza con mucha frecuencia para valuar acciones.

Suponga, como antes, que la dinámica del precio del activo subyacente es conducida por el movimiento geométrico Browniano. De esta manera, el rendimiento del activo es

(13) $$\mathrm{d}R_s=\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}=\mu\mathrm{d}_t+\sigma\mathrm{d}W_t.$$

Para calcular el cambio en el precio de la opción por cambios en S_t, se utiliza la expansión en serie de Taylor hasta términos de segundo orden

(14) $$\begin{aligned}\mathrm{d}c&=\frac{\partial c}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t+\frac{\partial c}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2S_t^2\mathrm{d}t\\&=\left(\frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t+\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2S_t^2\right)\mathrm{d}t+\frac{\partial c}{\partial S_r}\sigma S_t\mathrm{d}W.\end{aligned}$$

El rendimiento de la opción está dado por

(15) $$\mathrm{d}R_c=\frac{\partial c}{\partial S_t}\mathrm{d}R_S\frac{S_t}{c}+\frac{1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S_t^2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

De acuerdo con el modelo CAPM, los rendimientos de la opción y del activo subyacente satisfacen, respectivamente, las siguientes relaciones lineales con respecto del rendimiento del mercado, $\mathrm{d}R_M$

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{d}R_c\right]-r\mathrm{d}t=\beta_c\left[\mathrm{E}\left[\mathrm{d}R_M\right]-r\mathrm{d}t\right] \tag{16}$$

y

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{d}R_S\right]-r\mathrm{d}t=\beta_S\left[\mathrm{E}\left[\mathrm{d}R_M\right]-r\mathrm{d}t\right], \tag{17}$$

donde

$$\beta_S=\frac{\mathrm{C}ov\left(\mathrm{d}R_S,\mathrm{d}R_M\right)}{\mathrm{V}ar\left(\mathrm{d}R_M\right)} \tag{18}$$

y

$$\begin{aligned}\beta c&=\frac{Cov\left(\mathrm{d}R_c,\mathrm{d}R_M\right)}{Var\left(\mathrm{d}R_M\right)}\\&=\frac{Cov\left(\dfrac{\partial c}{\partial S_t}\mathrm{d}R_S\dfrac{S_t}{c},\mathrm{d}R_M\right)}{Var\left(\mathrm{d}R_M\right)}\\&=\frac{\partial c}{\partial S_t}\frac{S_t}{c}\frac{Cov\left(\mathrm{d}R_S,\mathrm{d}R_M\right)}{Var\left(R_M\right)}\\&=\frac{\partial c}{\partial S_t}\frac{S_t}{c}\beta_S,\end{aligned} \tag{19}$$

ya que $Cov\left(\mathrm{d}t,\mathrm{d}R_M\right)=0$. Si se sustituyen las ecuaciones (15), (17), (18) y (19) en (16), se tiene

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{d}c}{c}\right]-r\mathrm{d}t&=\beta_c\left(\mathrm{E}\left[\mathrm{d}R_M\right]-r\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{\partial c}{\partial S_t}\frac{S_t}{c}\beta_S\left(\mathrm{E}\left[\mathrm{d}R_M\right]-r\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{\partial c}{\partial S_t}\frac{S_t}{c}\beta_S\left(\frac{1}{\beta_S}\left(\mathrm{E}\left[\mathrm{d}R_S\right]-r\mathrm{d}t\right)\right)\\&=\frac{\partial c}{\partial S_t}\frac{S_t}{c}\left(\mathrm{E}\left[\mathrm{d}R_S\right]-r\mathrm{d}t\right),\end{aligned} \tag{20}$$

lo cual implica que

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{d}c\right]-rc\mathrm{d}t=\frac{\partial c}{\partial S_t}S_t\left(\mathrm{E}\left[\mathrm{d}R_S\right]-r\mathrm{d}t\right). \tag{21}$$

Si se sustituye la ecuación (13) en (21), se sigue que

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\mathrm{d}c\right]-rc\mathrm{d}t&=\frac{\partial c}{\partial S_t}S_t\left(\mathrm{E}\left[\mathrm{d}R_S\right]-r\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{\partial c}{\partial S_t}S_t\left(\mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}\right]-r\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{\partial c}{\partial S_t}S_t\left(\mathrm{E}\left[\mu\,\mathrm{d}t+\sigma\,\mathrm{dW}\right]-r\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{\partial c}{\partial S_t}S_t\left(\mu-r\right)\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{22}$$

donde se ha considerado que $\mathrm{E}\left[\mathrm{d}W_t\right]=0$. Por último, si se sustituye (14) en la ecuación (22), se tiene

$$\mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t+\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2S_t^2\right)\mathrm{d}t+\frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t\mathrm{d}W_t\right]-rc\mathrm{d}t=\frac{\partial c}{\partial S_t}S_t\left(\mu-r\right)\mathrm{d}t, \tag{23}$$

equivalentemente

$$\frac{\partial c}{\partial t}+rS_t\frac{\partial c}{\partial S_t}+\tfrac{1}{2}\sigma^2S_t^2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}-rc=0$$

■ *Obtención de la ecuación BSM mediante portafolios replicantes y autofinanciables*

Se desea determinar un portafolio con una posición larga del activo subyacente y un depósito bancario que, en cada instante, repliquen el valor de una opción europea de compra. Se supone que el activo subyacente y la opción se negocian en forma continua de tal manera que el riesgo se elimine en todo momento, es decir, la cobertura es dinámica. Se supone, como siempre, que el precio del activo subyacente, S_t, sigue un movimiento geométrico Browniano. Asimismo, se supone que en la economía existe un sistema bancario que paga por depósitos una tasa constante y libre de riesgo r. De esta manera, si se hace un depósito de b_t unidades monetarias, el rendimiento de dicha inversión, en el instante $\mathrm{d}t$, es

$$R_b = \frac{\mathrm{d}b_t}{b_t} = r\mathrm{d}t. \tag{24}$$

Portafolios replicantes
Se desea determinar un portafolio que combine el activo subyacente con un depósito bancario y que replique, en todo momento, el valor de una opción europea de compra. Suponga que se desean encontrar procesos estocásticos $v_t = v(S_t, t)$ *y* $w_t = w(S_t, t)$, tales que

$$v_t S_t + w_t b_t = c(S_t, t), \qquad o \leq t \leq T, \tag{25}$$

con $$\mathbb{P}\left\{\int_o^t v_s^2 \,\mathrm{d}s\right\} = \mathbb{P}\left\{\int_o^t w_s^2 \,\mathrm{d}s\right\} = 1.$$

La condición (25) indica que no existen posibilidades de arbitraje. Por ejemplo, si, antes del vencimiento, el lado izquierdo de (25) fuera menor que el lado derecho, se toma una posición corta en la opción de compra y la prima se invierte inmediatamente en el portafolio combinado a fin de generar una ganancia libre de riesgo. Asimismo, se supone que en la fecha de vencimiento

$$v_T S_T + w_T b_T = \max(S_T - K, 0),$$

sin importar la trayectoria que tome el activo subyacente.

Portafolios autofinanciables
Se supone que una vez que se ha realizado la inversión inicial no se requieren fondos adicionales para mantener el portafolio, de tal forma que los cambios requeridos en v_t se compensen con cambios, con signo opuesto, en w_t. Así,

$$S_t \mathrm{d}v_t + b_t \mathrm{d}w_t = 0. \tag{26}$$

Esto significa que

$$v_t \mathrm{d}S_t + w_t \mathrm{d}b_t = \mathrm{d}c(S_t, t). \tag{27}$$

Después de sustituir (24) en (27), se obtiene

(28)
$$v_t(\mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t) + w_t r b_t \mathrm{d}t = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial St}\mu S_t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t \mathrm{d}W_t$$

Si se igualan los coeficientes de $\mathrm{d}W_t$ en (28), se tiene

(29)
$$v_t = \frac{\partial c}{\partial S_t}$$

De la misma manera, de (25), se sigue que

(30)
$$w_t = \frac{c(S_t, t) - v_t S_t}{b_t}.$$

Las cantidades v_t y w_t determinan el portafolio replicante del valor del derivado, el cual para su mantenimiento es autofinanciable. Si ahora se igualan los términos en $\mathrm{d}t$, se sigue que

(31)
$$v_t \mu S_t + w_t r b_t = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}$$

Después de sustituir (29) y (30) en (31), se obtiene

$$\frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + r\left(c(S_t, t) - \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t\right) = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}.$$

Equivalentemente,

$$r\left(c(S_t, t) - \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t\right) = \frac{\partial c}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}.$$

Es importante destacar que el rendimiento medio, μ del activo subyacente no aparece en la ecuación anterior. Esto quiere decir que si dos agentes tienen diferentes expectativas sobre el rendimiento promedio del activo subyacente, ellos están dispuestos a omitirlas en sus decisiones de inversión con tal de que la volatilidad se mantenga constante. Por lo tanto,

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}+\frac{\partial c}{\partial S_t}S_t r-rc\left(S_t,t\right)=0, \tag{32}$$

lo que coincide plenamente con la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes.

■ *Obtención de la ecuación BSM mediante el valor presente neto*

En esta sección se obtiene la fórmula de Black-Scholes-Merton para calcular el precio de una opción europea de compra mediante el valor presente de las ganancias esperadas. Se supone que el activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato y que su precio es conducido por un movimiento geométrico Browniano neutral al riesgo. El precio o la prima de la opción se calcula como el valor presente del valor esperado del valor intrínseco. Con este propósito se determina, primero, la función de densidad del precio del subyacente en la fecha de vencimiento. Posteriormente, se calcula la integral que define el valor presente del valor intrínseco esperado, cantidad que proporciona el precio teórico del producto derivado en cuestión.

Distribución del rendimiento logarítmico del subyacente

Considere, como antes, un proceso de Wiener $(W_t)_{t\varepsilon[0,T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración (Ω, F, $(F_t)_{t\varepsilon[0,T]}$, P. Se supone que el precio de una acción al tiempo t, S_t, es conducido por el movimiento geométrico Browniano

$$\mathrm{d}S_t=\mu S_t\mathrm{d}t+\sigma S_t\mathrm{d}W_t \tag{33}$$

en donde el parámetro de tendencia, $\mu \,\varepsilon\, \mathbb{R}$ es el rendimiento medio esperado del activo subyacente y $\sigma>0$ es su volatilidad instantánea, por unidad de tiempo. Una simple aplicación del lema de Itô conduce a

$$\mathrm{d}\left(\ln S_t\right)=\left(\mu-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}t+\sigma\,\mathrm{d}W_t. \tag{34}$$

Si se discretiza la ecuación anterior con $\Delta t = T - t$, entonces se obtiene

$$\ln S_T - \ln S_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\,\varepsilon,$$

donde $\varepsilon \sim N(0,1)$. Por lo tanto,

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \sim N\left(\left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right) \tag{35}$$

En otras palabras, el rendimiento logarítmico tiene distribución normal con la misma varianza del cambio porcentual de S_t, pero con parámetro de tendencia, $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$, menor al rendimiento medio esperado, μ.

Valuación neutral al riesgo

Debido a la consideración de un rendimiento esperado μ, la ecuación (33) no es independiente de las preferencias al riesgo de los agentes que participan en el mercado del subyacente. En efecto, entre mayor sea la aversión al riesgo de un agente, mayor tiene que ser el rendimiento medio esperado, μ, a fin de que el premio $v = \mu - r$ le sea atractivo al agente. Si se supone que todos los agentes son neutrales al riesgo, es decir, no requieren de un premio para inducirlos a participar en el mercado, entonces $v = 0$, así, $\mu = r$ y de esta manera el rendimiento medio esperado de cualquier activo es la tasa de interés libre de riesgo, r. Otra forma de medir el premio al riesgo, de uso más frecuente, consiste en estandarizar v por unidad de varianza (más precisamente por unidad de desviación estándar), es decir, $\lambda = v/\sigma$. En este caso, si σ aumenta, entonces λ disminuye y el agente pedirá más v para compensar el aumento en σ hasta conseguir que λ aumente y alcance su nivel inicial. De igual forma, el agente podría aceptar una disminución v a cambio de una disminución en σ. Como antes, si los agentes no requieren de un premio para inducirlos a participar en el mercado, entonces $\lambda = 0$. Ahora bien, si se escribe

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_t &= rS_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t\right) \\ &= rS_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\left(\lambda\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t\right), \end{aligned}$$

entonces, bajo el supuesto de neutralidad al riesgo, $\lambda = 0$, se tiene que la ecuación (33) se transforma en

$$\mathrm{d}S_t = rS_t\mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t, \tag{36}$$

en cuyo caso, se dice que el movimiento Browniano está definido sobre una medida de probabilidad neutral al riesgo. Una posible interpretación de (36) es que los agentes estarían dispuestos a omitir su parámetro de preferencias, μ, y recibir r con tal de que la volatilidad, σ, se mantenga constante. El concepto de valuación neutral al riesgo es, sin duda, uno de los más importantes en el estudio de productos derivados. Vale la pena resaltar que el teorema de Girsanov proporciona una justificación teórica alternativa a la ecuación (36) (véase, por ejemplo, Venegas-Martínez (2007)).

Función de densidad del precio del activo subyacente en un mundo neutral al riesgo

En esta sección se obtiene la función de densidad del precio del activo subyacente bajo el supuesto de neutralidad al riesgo. En vista del resultado (35) y en un mundo neutral al riesgo donde se cumple (36), se tiene que $\ln\left(S_T/S_t\right)$ tiene una distribución normal con media $\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)$ y varianza $\sigma^2(T-t)$. Considere $\varepsilon \sim N(0,1)$ y su función de densidad

$$\phi(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2}, \qquad \varepsilon \in R. \tag{37}$$

Si se define ahora

$$g(\varepsilon) := S_T = S_t \exp\left\{\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\,\varepsilon\right\}, \tag{38}$$

se tiene que

$$g^{-1}(S_T) = \frac{\ln\left(\dfrac{S_T}{S_t}\right) - \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{39}$$

De esta manera, la función de densidad de S_T, dado S_t, está dada por la expresión

$$f_{S_T|S_t}\left(s|S_t\right) = \phi\left(g^{-1}(s)\right)\left|\frac{\mathrm{d}g^{-1}(s)}{\mathrm{d}s}\right|. \tag{40}$$

Observe, primero, que el Jacobiano de la transformación satisface

$$\left|\frac{\mathrm{d}g^{-1}(s)}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{1}{s\sigma\sqrt{T-t}}.$$

En consecuencia,

(41)
$$f_{S_T|S_t}\left(s|S_t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,(T-t)}\sigma\, s}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_T}\right)-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right\}.$$

Esta función de densidad se utilizará para calcular el valor presente neto de una opción europea.

Valuación neutral al riesgo de una opción europea de compra
El precio de una opción de compra europea en t con precio de ejercicio K y vencimiento en T, $c = c\left(S_t, t; T, K, r, \sigma\right)$, está dado por el valor esperado del valor presente del valor intrínseco o valor presente neto (VPN):

$$c = e^{-r(T-t)}\mathrm{E}\left\{\max\left(S_T - K, 0\right)|F_t\right\}.$$

Así pues,

$$\begin{aligned}
c &= e^{-r(T-t)}\int_o^T \max\left(s-K,0\right) f_{S_T|S_t}\left(s|S_t\right)\mathrm{d}s \\
&= e^{-r(T-t)}\int_K^\infty \left(s-K\right) f_{S_T|S_t}\left(s|S_t\right)\mathrm{d}s \\
&= e^{-r(T-t)}\int_{s>K} s f_{S_T|S_t}\left(s|S_t\right)\mathrm{d}s - Ke^{-r(T-t)}\int_{s>K} f_{S_T|S_t}\left(s|S_t\right)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

(42)
$$\begin{aligned}
&= e^{-r(T-t)}\int_{s>K} \frac{1}{\sqrt{2\pi\,(T-t)}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right)-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right\}\mathrm{d}s \\
&\quad - Ke^{-r(T-t)}\int_{s>K} \frac{1}{\sqrt{2\pi\,(t-t)}\sigma\, s}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right)-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right\}\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

En lo que sigue, las dos integrales de (42) se denotarán, respectivamente, mediante I_1 y I_2. Si ahora se utiliza un cambio de variable, la primera integral se calcula como

$$I_1 := e^{-r(T-t)} S_t \int_{\left\{\varepsilon > \frac{\ln(K/S_t)-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} e^{\sigma\sqrt{T-t}\,\varepsilon+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)} \mathrm{d}\varepsilon$$

(43)
$$= S_t \int_{\left\{\varepsilon-\sigma\sqrt{T-t} > \frac{\ln(K/S_t)-\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\varepsilon-\sigma\sqrt{T-t}\right)^2} \mathrm{d}\varepsilon$$

$$= S_t \int_{\left\{-\infty<u< \frac{\ln(S_t/K)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \mathrm{d}u,$$

donde se ha empleado el hecho de que $-\varepsilon \sim N(0,1)$ y el cambio de variable $\mu = \varepsilon - \sigma\sqrt{T-t}$. Asimismo, a partir del cambio de un variable, la segunda integral satisface

(44)
$$I_2 := -Ke^{-r(T-t)} \int_{\left\{\varepsilon > \frac{\ln(K/S_t)-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} \mathrm{d}\varepsilon$$

$$= -\ Ke^{-r(T-t)} \int_{\left\{-\infty<\varepsilon< \frac{\ln(S_t/K)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} \mathrm{d}\varepsilon.$$

Por lo tanto, de (43) y (44), se sigue que

(45)
$$c = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

donde la función $\Phi(d)$ es la función de distribución acumulada de $\varepsilon \sim N(0,1)$, es decir,

(46)
$$\Phi(d) = \mathrm{P}_\varepsilon\{\varepsilon \le d\} = \int_{-\infty}^{d} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} \mathrm{d}\varepsilon = 1-\Phi(-d),$$

(47)
$$d_1 = d_1(S_t, t; T, K, r, \sigma) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

(48)
$$d_2 = d_2\left(S_t, t; T, K, r, \sigma\right) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Las ecuaciones (45) y (11) son equivalentes en el sentido de que (45) es la única solución de (11).

■ *Obtención de la ecuación BSM mediante el modelo de Markowitz*

Se supone ahora que el individuo tiene acceso a tres activos reales: una acción de precio S_t, una opción sobre la acción de precio $c = c(S_t, t)$ y un bono de precio b_t libre de riesgo de incumplimiento que paga tasa fija r. Suponga que el rendimiento que paga el activo subyacente es

(49)
$$\mathrm{d}R_S = \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t.$$

Asimismo, suponga que el rendimiento que paga el bono está dado por

(50)
$$\mathrm{d}R_b = r\mathrm{d}t.$$

En vista de (50), la aplicación del lema de Itô a $c = c\left(S_t, t\right)$ conduce a que el rendimiento de la opción satisface

(51)
$$\mathrm{d}R_c = \frac{\mathrm{d}c}{c} = \mu_c\,\mathrm{d}t + \sigma_c\,\mathrm{d}W_t,$$

donde

$$\mu_c \equiv \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu\,S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right)\frac{1}{c}$$

y

$$\sigma_c = \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma\,S_t\frac{1}{c}.$$

Se supone que $c(S_t,T)=\max(S_t-K,0)$, donde K es el precio de ejercicio de la opción. Sea $\alpha_{1t}=S_t/A_t$ la proporción de la riqueza que el individuo asigna a la tenencia de acciones, $\alpha_{2t}=c/A_t$ la proporción de la riqueza que asigna a una opción europea de compra sobre la acción, y $1-\alpha_{1t}-\alpha_{2t}$ la fracción complementaria que se asigna a un instrumento libre de riesgo que paga un rendimiento r constante a cualquier plazo. En este caso, la riqueza, $A_t=b_t+S_t+c$, satisface

$$\text{(52)}\qquad \mathrm{d}A_t=A_t(1-\alpha_{1t}-\alpha_{2t})\mathrm{d}R_b+A_t\alpha_{1t}\mathrm{d}R_S+A_t\alpha_{2t}\mathrm{d}R_c.$$

Después de sustituir (50)-(51) en la riqueza, ésta se puede reescribir como

$$\mathrm{d}A_t=A_t\left(r+(\mu-r)\alpha_{1t}+(\mu_c-r)\alpha_{2t}\right)\mathrm{d}t+A_t(\alpha_{1t}\sigma+\alpha_{2t}\sigma_c)\mathrm{d}W_t.$$

En consecuencia, se sigue que

$$\mu_A:=\mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{d}A_t}{A_t}\right]\frac{1}{\mathrm{d}t}=r+(\mu-r)\alpha_{1t}+(\mu_c-r)\alpha_{2t}$$

y

$$\sigma_A^2:=\mathrm{Var}\left[\frac{\mathrm{d}A_t}{A_t}\right]\frac{1}{\mathrm{d}t}=(\alpha_{1t}\sigma+\alpha_{2t}\sigma_c)^2$$

Considere ahora el problema de decisión sobre las proporciones α_{1t} y α_{2t} de la riqueza, A_t, que se asignan a los diferentes activos (véase Markowitz (1952)):

$$\text{(53)}\qquad \begin{aligned}&\text{Minimizar}_{\alpha_{1t},\alpha_{2t}}\ \tfrac{1}{2}\sigma_A^2=\tfrac{1}{2}(\alpha_{1t},\alpha_{2t})\begin{pmatrix}\sigma^2 & \sigma\sigma_c\\ \sigma\sigma_c & \sigma_c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{1t}\\ \alpha_{2t}\end{pmatrix}\\ &\text{sujeto a: } \mu_A=r+(\alpha_{1t},\alpha_{2t})\begin{pmatrix}\mu_1 & - & r\\ \mu_2 & - & r\end{pmatrix}=\mu_0.\end{aligned}$$

El Lagrangeano asociado al problema anterior de programación no lineal es

$$L\equiv\tfrac{1}{2}(\alpha_{1t}\sigma+\alpha_{2t}\sigma_c)^2+v\left[\mu_0-r-\alpha_{1t}(\mu_1-r)-\alpha_{2t}(\mu_2-r)\right],$$

donde v es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción. Las condiciones de primer orden $\partial L/\partial\alpha_{1t}=0,\ i=1,2$, conducen a

$$\begin{cases} \alpha_{1t}\sigma + \alpha_{2t}\sigma_c = v\left(\dfrac{\mu - r}{\sigma}\right), \\ \alpha_{1t}\sigma + \alpha_{2t}\sigma_c = v\left(\dfrac{\mu_c - r}{\sigma_c}\right). \end{cases}$$

En consecuencia,

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{\mu_c - r}{\sigma_c}.$$

Después de sustituir μ_c y σ_c en la ecuación anterior, se tiene que

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right) - rc = (\mu - r)\frac{\partial c}{\partial S_t} S_t$$

lo cual conduce a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 - rc = 0,$$

junto con la condición de frontera $c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0)$.

- *La ecuación BSM y el teorema de Modigliani-Miller (opciones sobre acciones apalancadas)*

Las opciones de compra y venta, así como varias de sus combinaciones, son instrumentos financieros de bajo costo que pueden ser vistos por los inversionistas privados como sustitutos de apalancamiento corporativo. En esta sección se muestra cómo las opciones financieras proporcionan un marco teórico adecuado para analizar la emisión de deuda como medio de financiamiento de una empresa. Una deuda es una promesa futura de pago en la que el emisor se obliga a pagar cantidades específicas en fechas futuras predeterminadas. Si la promesa no se cumple, el acreedor puede ejercer acción legal en contra del deudor.

El concepto de deuda cobra gran importancia en las estructuras de capital de las empresas. Los tenedores de acciones comunes tienen derecho a voto para elegir al consejo de administración y decidir sobre las políticas de la empresa y sólo tienen derecho al pago de dividendos después de que éstos han sido pagados a los poseedores de acciones preferentes; estos últimos no tienen derecho a voto pero tienen primacía sobre los accionistas comunes al pago de dividendos y a la liquidación en caso de quiebra. Para los accionistas comunes, el dividendo a que tienen derecho los accionistas preferentes proporciona el mismo apalancamiento que un bono con tasa de interés constante. La empresa paga dividendos y deudas no sólo porque la ley la obliga, sino porque el valor de sus acciones es mayor si la empresa paga las deudas que si no lo hace.

Los accionistas en una corporación apalancada, de responsabilidad limitada, son esencialmente los dueños de una opción de compra cuyo precio de ejercicio son los pasivos de la empresa. Existe una sorprendente relación entre el teorema de Modigliani-Miller (MM) (1958) y las condiciones de arbitraje del modelo BSM. En ambos, una acción y una opción sobre esa acción comparten la misma "clase de riesgo", es decir, son instrumentos perfectamente correlacionados, por lo menos en las variaciones pequeñas en sus precios; y que podrían ser mantenidas en la misma clase de riesgo frente a variaciones más grandes a través de un rebalanceo dinámico del número de opciones en el tiempo.

A continuación se establece la condición de paridad *put-call* para demostrar su equivalencia con el teorema de MM. Esta relación se hace todavía más clara cuando las opciones en cuestión son escritas sobre una misma acción. La paridad *put-call* fue establecida primero por Stoll (1969) y se obtiene como sigue. En un análisis similar al de las opciones anteriores se puede mostrar que el precio de una opción de venta del tipo europeo, $p = p(S_t, t; T, K, r, \sigma)$, está dado por

$$p = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1).$$

Al sumar los precios de una opción de compra y una de venta, se obtiene lo que se conoce como condición de paridad de *put-call*:

$$\begin{aligned}
p + S_t &= Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1) + S_t \\
&= Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) + S_t\left(1 - \Phi(-d_1)\right) \\
&= Ke^{-r(T-t)}\left(1 - \Phi(-d_2)\right) + S_t\Phi(-d_1) \\
&= -Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) + S_t\Phi(d_1) + e^{-r(T-t)}K \\
&= c + Ke^{-r(T-t)}.
\end{aligned}$$

La utilidad de la relación anterior radica en que una vez que se ha calculado el precio de opción de compra $c(S_t,t)$, el precio de una opción de venta, $p(S_t,t)$, con características similares, se calcula mediante $p = c - \left(S_t - Ke^{-r(T-t)}\right)$ o bien $p = c - V$, donde $V = V(S_t,t)$ es el precio de un contrato forward. En lo que sigue se verá que la condición de paridad put-call es realmente una versión disfrazada del teorema de MM. Para ver esto, considere la siguiente identidad válida para cualquier valor de K:

$$S_t = c(S_t,t) + Ke^{-r(T-t)} - p(S_t,t),$$

donde S_t es el precio "spot" de la acción subyacente, K es el precio de ejercicio de las opciones call y put, T es el tiempo de vencimiento de las opciones, r es la tasa de interés y $c(S_t,t)$ y $p(S_t,t)$ son las primas de las opciones call y put, respectivamente. Ahora se reinterpretará la condición anterior con respecto de la estructura de capital de una empresa. Por simplicidad, se supondrá que la empresa emite un solo bono cupón cero. En este caso, S_t se convierte en el flujo de efectivo de la empresa, K es el valor contable de los pasivos de la empresa y $c(S_t,t)$ es el valor de mercado de las acciones apalancadas de la empresa sujeta a riesgo crédito. Si el valor de los flujos de efectivo en la fecha de vencimiento de la deuda S_T fuera menor que K, con base en la responsabilidad limitada, en caso de quiebra los acreedores tendrían primacía sobre los accionistas en el proceso de liquidación. El valor de mercado de la deuda es $Ke^{-r(T-t)} - p(S_t,t)$, es decir, el valor presente de la deuda menos el valor de la opción de venta de los accionistas. El valor de mercado de la deuda y de las acciones de la empresa son claramente funciones del apalancamiento de la empresa. En virtud de la paridad put-call, se sigue que la suma es independiente del apalancamiento. Es decir, los componentes de la estructura de capital siempre suman S_t, el flujo de efectivo no apalancado, justamente como lo expresa el teorema de MM en ausencia tanto de costos de transacción como de impuestos sobre la deuda (beneficio fiscal de deducir el pago de intereses de la deuda).

- *Obtención de la ecuación BSM mediante el postulado de racionalidad económica*

Esta sección muestra que la consistencia de la existencia de consumidores racionales con los resultados derivados de principios financieros fundamentales como son: condiciones de no arbitraje, argumentos del modelo CAPM, portafolios replicantes y autofinanciables, valor presente de las ganancias esperadas, modelo de Markowitz y el teorema de Modigliani-Miller, entre otros.

Se supone ahora que el individuo tiene acceso a tres activos reales: una acción de precio S_t, una opción sobre la acción de precio $c = c(S_t, t)$ y un bono de precio b_t libre de riesgo de incumplimiento que paga tasa fija r. Suponga que el rendimiento que paga el activo subyacente es

$$\mathrm{d}R_S = \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t. \tag{54}$$

Asimismo, suponga que el rendimiento que paga el bono está dado por

$$\mathrm{d}R_b = r\,\mathrm{d}t. \tag{55}$$

En vista de (54), la aplicación del lema de Itô a $c = c(S_t, t)$ conduce a que el rendimiento de la opción satisface

$$\mathrm{d}R_c = \frac{\mathrm{d}c}{c} = \mu_c\,\mathrm{d}t + \sigma_c\,\mathrm{d}W_t, \tag{56}$$

donde
$$\mu_c \equiv \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 \right)\frac{1}{c}$$

y
$$\sigma_c = \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t \frac{1}{c}$$

Se supone que $c = c(S_t, t) = \max(S_t - K, 0)$, donde K es el precio de ejercicio de la opción. Sea a_t la riqueza real del individuo y sean $w_{1t} = S_t/a_t$ la proporción de la riqueza que el individuo asigna a la tenencia de acciones, $w_{2t} = c/a_t$ la proporción de la riqueza que asigna a una opción europea de compra sobre la acción, y $1 - w_{1t} - w_{2t}$ la fracción complementaria que se asigna a un instrumento libre de riesgo que paga un rendimiento r constante a cualquier plazo. La variable w_{it} es diferente de la variable α_{it}, introducida en la sección anterior en (52), ya que w_{it} incorpora ahora la decisión de consumo. Por la misma razón, la variable a_t y la variable A_t, también introducida en (52), son diferentes. En este caso, el agente desea resolver el siguiente problema (*cf.* Merton (1969) y (1971)):

(57) $$\underset{C_t, w_{1t}, w_{2t}}{\text{Maximizar}} \ \mathrm{E}\left[\int_0^T \frac{C_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} \mathrm{d}s + b\left(a_T, T\right) \mid F_t\right],$$

sujeto a:

(58) $$\mathrm{d}a_t = a_t w_{1t} \mathrm{d}R_S + a_t w_{2t} \mathrm{d}R_c + a_t \left(1 - w_{1t} - w_{2t}\right) \mathrm{d}R_b - C_t \mathrm{d}t,$$

donde C_t es consumo, δ es la tasa subjetiva de descuento, $b\left(a_T, T\right)$ es una herencia o valor de salvamento y F_t es la información (sobre precios) disponible al tiempo t. Después de sustituir (54)-(56) en la restricción presupuestal, ésta se puede reescribir como

$$\mathrm{d}a_t = a_t \left(r + (\mu - r) w_{1t} + (\mu_c - r) w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right) \mathrm{d}t + a_t \left(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c\right) \mathrm{d}W_t.$$

Si se define (la función de utilidad indirecta)

$$J\left(a_t, t\right) = \max_{C_t, w_{1t}, w_{2t}} \ \mathrm{E}\left[\int_t^T \frac{C_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} \mathrm{d}s + b\left(a_T, T\right) \middle| F_t\right],$$

se sigue que

$$\begin{aligned} J\left(a_t, t\right) &= \max_{C_t, w_{1t}, w_{2t}} \ \mathrm{E}\left[\int_t^{t+dt} \frac{C_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} \mathrm{d}s + \int_{t+dt}^T \frac{C_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} \mathrm{d}s + b\left(a_T, T\right) \middle| F_t\right] \\ &= \max_{C_t, w_{1t}, w_{2t}\big|_{[t, t+dt]}} \ \mathrm{E}\left[\int_t^{t+dt} \frac{C_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} \mathrm{d}s + J\left(a_t + \mathrm{d}a_t, t + \mathrm{d}t\right) \middle| F_t\right] \\ &= \max_{C_t, w_{1t}, w_{2t}\big|_{[t, t+dt]}} \ \mathrm{E}\left[\frac{C_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} \mathrm{d}t + o\left(\mathrm{d}t\right) + J\left(a_t, t\right) + \mathrm{d}J\left(a_t, t\right) \middle| F_t\right], \end{aligned}$$

en donde se ha utilizado la recursividad de J, una aproximación de primer orden del teorema de Taylor y el teorema del valor medio del cálculo integral. Observe también que $J\left(a_T, T\right) = b\left(a_T, T\right)$. En virtud del lema de Itô, aplicado a $J = J\left(a_t, t\right)$, se tiene que

(59)
$$\begin{aligned} 0 = \max_{C_t, w_{1t}, w_{2t}} \ \mathrm{E}\Bigg[& \frac{C_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} \mathrm{d}t + o\left(\mathrm{d}t\right) + \Bigg[J_t + J_a a_t \left(r + (\mu - r) w_{1t} + (\mu_c - r) w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right) \\ & + \tfrac{1}{2} J_{aa} a_t^2 \left(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c\right)^2 \Bigg] \mathrm{d}t + J_a a_t \left(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c\right) \mathrm{d}W_t \ \Bigg| \ F_t \Bigg]. \end{aligned}$$

Si se toman esperanzas de los términos dentro del paréntesis y, posteriormente, se divide entre $\mathrm{d}t$ y se toma el límite cuando $\mathrm{d}t \to 0$; se sigue que

(60)

$$0 = \max_{C_t, w_{1t}, w_{2t}} \left\{ \frac{C_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} + J_t + J_a a_t \left(r + (\mu - r) w_{1t} + (\mu_c - r) w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right) \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{2} J_{aa} a_t^2 \left(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c \right)^2 \right\}.$$

Considere un candidato de la forma

$$J(a_t, t) = V(a_t) e^{-\delta t},$$

entonces

$$J_a = V'(a_t) e^{-\delta t}, \quad J_{aa} = V''(a_t) e^{-\delta t}, \quad \text{y} \quad J_t = -\delta V(a_t) e^{-\delta t}.$$

Ahora bien, si C_t, w_{1t} y w_{2t} son óptimos, se tiene que

(61)
$$0 = \frac{C_t^\gamma}{\gamma} - \delta V(a_t) + V'(a_t) a_t \left(r + (\mu - r) w_{1t} + (\mu_c - r) w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right)$$
$$+ \frac{1}{2} V''(a_t) a_t^2 \left(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c \right)^2.$$

Suponga

$$V(a_t) = \beta \frac{a_t^\gamma}{\gamma},$$

entonces

$$V'(a_t) = \beta a_t^{(\gamma-1)} \quad \text{y} \quad V''(a_t) = \beta (\gamma - 1) a_t^{(\gamma-2)}.$$

De esta manera, la ecuación (61) se transforma en

(62)
$$0 = \frac{C_t^\gamma}{\gamma} - \delta\beta \frac{a_t^\gamma}{\gamma} + \beta a_t^\gamma \left(r + (\mu - r) w_{1t} + (\mu_c - r) w_{2t} - \frac{C_t}{a_t} \right)$$
$$+ \frac{1}{2} \beta (\gamma - 1) a_t^\gamma \left(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c \right)^2.$$

Al derivar la expresión anterior con respecto de C_t, w_{1t} y w_{2t}, se obtienen, respectivamente:

(63)
$$C_t^{\gamma-1} - \beta\, a_t^{\gamma-1} = 0,$$

$$\beta\, a_t^{\gamma}\,(\mu - r) + \beta\,(\gamma - 1) a_t^{\gamma}\,(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)\sigma = 0$$

y

$$\beta\, a_t^{\gamma}\,(\mu_c - r) + \beta\,(\gamma - 1) a_t^{\gamma}\,(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)\sigma_c = 0$$

Estas tres ecuaciones se pueden reescribir como:

(64)
$$C_t = \beta^{1/(\gamma-1)} a_t,$$

$$\mu - r = (1-\gamma)(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)\sigma$$

y
$$\mu_c - r = (1-\gamma)(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)\sigma_c.$$

La primera ecuación indica que el consumo es proporcional al nivel de la riqueza. Las dos últimas ecuaciones implican que los premios al riesgo de S_t y $c(S_t, t)$ son iguales, es decir,

(66)
$$\frac{\mu_c - r}{\sigma_c} = \frac{\mu - r}{\sigma}.$$

Después de sustituir μ_c y σ_c en la ecuación anterior se tiene que

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right) - rc = (\mu - r)\frac{\partial c}{\partial S_t} S_t,$$

lo cual conduce a la ecuación diferencial parcial de Black-Sholes:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 - rc = 0$$

junto con la condición de frontera $c(S_t, t) = \max(S_t - K, 0)$. Este resultado es acorde con los obtenidos en las secciones previas.

Como puede observarse, a partir de los resultados anteriores, cuando los agentes son expuestos al riesgo de mercado, éste afecta de manera sensible su comportamiento y expectativas. Por ejemplo, si un consumidor-inversionista toma decisiones de consumo e inversión en un ambiente determinista y tiene acceso a bonos y acciones, se tiene que suponer que los dos activos son perfectos sustitutos, ya que de otra forma el activo que paga un menor rendimiento desaparece automáticamente de las alternativas del agente y ni siquiera lo considera en la restricción presupuestal. Por esta razón es común suponer que el agente tiene acceso sólo a un bono, libre de riesgo de incumplimiento, que paga tasa de interés constante. En este caso, el agente asigna el 100% de su riqueza a la tenencia del bono. Además, el consumidor puede determinar la trayectoria óptima de consumo. Mientras que en el caso estocástico, el agente asigna una proporción de su riqueza al bono distinta del 100% y las proporciones complementarias las asigna a la tenencia de un activo riesgoso y un derivado sobre dicho activo. Además, infortunadamente, la trayectoria de consumo ya no puede ser determinada porque el consumo se convierte en variable aleatoria, situación que está más acorde con la realidad. En consecuencia, la consideración del riesgo conlleva a cambios cualitativos y cuantitativos drásticos en las decisiones de consumo y portafolio.

■ *Conclusiones*

Este trabajo ha proporcionado diversas pruebas indirectas que muestran que postular la existencia de consumidores hiper-racionales es consistente con la teoría financiera. La EDP de segundo grado de BSM cuya solución determina el precio de un producto derivado se obtuvo bajo diferentes principios financieros, tales como: condiciones de no arbitraje, CAPM, portafolios replicantes y autofinanciables, VPN, el modelo de Markowitz y el teorema de Modigliani-Miller. Posteriormente se obtuvo exactamente la misma ecuación (de BSM) utilizando el postulado de racionalidad económica. Esto significa que dicho postulado es plenamente consistente con los conceptos centrales que se utilizan en la teoría y práctica financiera.

Este trabajo, al mostrar que los principios financieros más comunes llevan consigo de manera implícita el postulado de racionalidad económica, revive la discusión sobre la aceptación de dicho postulado o de cualquiera de sus formas relajadas. Esto traerá como consecuencia el desarrollo de más investigación en varias direcciones sobre el tema; en particular, sobre la búsqueda de otros principios financieros que sean consistentes con racionalidad económica.

Por último, es importante destacar que aunque el problema del consumidor-inversionista racional se resolvió utilizando una forma funcional específica del índice de satisfacción, la obtención de ecuación diferencial parcial de BSM es independiente de la función de utilidad.

■ *Bibliografía*

Black, F. y M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*. Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.

Markowitz, H. M. (1952). "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, pp. 77-99.

Merton, R. C. (1969). "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case". *Review of economics and statistics*, Vol. 51, No. 2, pp. 247-257.

Merton, R. C. (1971). "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model". *Journal of Economic Theory*, Vol. 3, No. 4, pp.373-413.

— (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economics*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.

Modigliani, F. y M. H. Miller (1958). "The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment". *American Economic Review*, Vol. 48, No. 3, pp. 261-97.

Sharpe, W. F. (1964). "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk". *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3, pp. 425-42.

Simon, H. (1957). "A Behavioral Model of Rational Choice", en Model of Man, Social and Rational: Mathematical Essay on Rational Human Behavior in a Social Setting. New York: Wiley.

Smith, V. L. (1962). "An Experimental Study of Competitive Market Behavior". *Journal of Political Economy*, Vol. 70, pp. 111-137.

Stoll, H. R. (1969). "The Relationship Between Put and Call Option Prices." *Journal of Finance*, Vol. 24, No. 5, pp. 801-24.

Venegas-Martínez, F. (2001). "Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis". *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 25, No. 9, pp. 1429-1449.

— (2005). "Bayesian Inference, Prior Information on Volatility, and Option Pricing: A Maximum Entropy Approach". *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol.8, No. 1, pp. 1-12.

— (2006a). "Stochastic Temporary Stabilization: Undiversifiable Devaluation and Income Risks". *Economic Modelling*, Vol. 23, No. 1, pp. 157-173.

— (2006b). “Fiscal Policy in a Stochastic Temporary Stabilization Model: undiversifiable Devaluation Risk”. *Journal of World Economic Review*, Vol. 1, No. 1, pp. 13-38.

— (2007). “Riesgos financieros y económicos (productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre”, 2da. edición, International Thomson Editors, México.

— (2007b). “Fiscal Policy in a Stochastic Model of Endogenous Growth: the Mexican Case”. *Indian Development Review*, Vol. 6, No. 2, forthcoming.

— (2007c). Algunos Principios Financieros consistentes con la Racionalidad Económica. Capítulo del libro “Metodología de la ciencia Económica”, Compilador Juan José Jardón Urrieta, editado por Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo y UNAM, México.

— (2008). ”Temporary Stabilization in Developing Countries and the Real Option of Waiting when Consumption Can Be Delayed”. *International Journal of Economic Research*, Vol. 7, forthcoming.