EconoQuantum, volumen 21, número 2, julio-diciembre de 2024, pp. 29-46
DOI: https://doi.org/10.18381/eq.vi21i2.7319

Una nueva solución para la distribución de recursos basada en niveles y asignación de incentivos

A new solution for resource distribution based on levels and incentive allocation

Luz Judith Rodríguez Esparza
Julio César Macías Ponce
Roberto Alejandro Kú Carrillo

Resumen

Objetivo: este trabajo tiene como objetivo proponer una alternativa de reparto de incentivos por niveles.
Metodología: el reparto por niveles se obtiene mediante una regresión lineal simple entre el reparto de incentivos asignado a cada agente y el monto demandado, con base en su nivel en la estructura de escalafón.
Resultados: la solución propuesta logra repartir exactamente el recurso disponible entre todos los agentes, presentando una implementación sencilla y práctica. Se incluyen tres ejemplos que ilustran la aplicación de este nuevo método, destacando las diferencias con respecto al reparto usual y al proporcional.
Limitaciones: la regresión lineal simple utilizada asume una relación lineal entre el nivel de escalafón y los incentivos, lo cual puede no reflejar la complejidad de algunas estructuras organizacionales.
Originalidad: la solución de reparto desarrollada en este trabajo ofrece una interpretación en términos de desempeños individuales, lo que amplía su aplicabilidad a diversas áreas.
Conclusiones: nuestra propuesta de reparto actúa como un mediador entre los repartos usual y proporcional. Se observa que el reparto usual favorece a los niveles de menor desempeño, mientras que el proporcional beneficia a los niveles más altos.
Palabras clave: problemas de reparto, niveles, incentivos, regresión lineal simple.
Clasificación JEL: C02, C69, C79.

Abstract

Objective: this work aims to propose an alternative for distribution of incentives by levels.
Methodology: distribution by levels is obtained through a simple linear regression between the distribution of incentives assigned to each agent and the amount demanded according to their level in the ladder structure.
Results: the proposed solution manages to exactly distribute the available resource among all agents, presenting a simple and practical implementation. Three examples are included that illustrate the application of this new method, highlighting the differences as compared to both the usual and proportional distribution modes.
Limitations: the simple linear regression used assumes a linear relationship between the level and incentives, which may not reflect the complexity of some organizational structures.
Originality: the distribution solution developed in this work offers an interpretation in terms of individual performances, which expands its applicability to various areas.
Conclusions: our distribution proposal acts as a mediator between the usual and proportional distributions. It is observed that the usual distribution favors the lowest performance levels, while the proportional distribution benefits the highest levels.
Key Words: allocation problems, levels, incentives, simple linear regression.
JEL Classification: C02, C69, C79.

Luz Judith Rodríguez Esparza. Investigadora por México Conahcyt-Universidad Autónoma de Aguascalientes. México. Correo: luz.rodriguez@edu.uaa.mx ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2241-1102
Julio César Macías Ponce. Universidad Autónoma de Aguascalientes, Depto. de Matemáticas y Física. México. Correo: jlmacias@correo.uaa.mx ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5141-7074
Roberto Alejandro Kú Carrillo. Universidad Autónoma de Aguascalientes, Depto. de Matemáticas y Física. México. Correo: alejandro.ku@edu.uaa.mx ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0425-0122
Agradecimientos. Esta investigación ha sido financiada a través de los proyectos PIM23-1, PIM23-3 y PIM24-5 de la Universidad Autónoma de Aguascalientes.

Recepción: 19/08/2023. **Aceptación:** 24/05/2024.

Introducción

La distribución o reparto de recursos en la vida real involucra consideraciones múltiples —días trabajados, edad, etc.—, cuyo resultado final depende de varias dimensiones.

Ahora bien, dependiendo del recurso disponible y las demandas de los agentes se puede tener un problema de bancarrota o de excedente. En el área de economía ha sido muy estudiado el tema de reparto de bienes (O'Neill, 1982; Olvera-López et al., 2014), donde se distribuye, por ejemplo, cierta cantidad de dinero entre los agentes involucrados. Si la demanda de dichos agentes es mayor a lo disponible, existen mecanismos para realizar una distribución "lo más justa posible". En este contexto, otro problema relevante que puede ser considerado como un problema de reparto es la distribución de incentivos, estímulos o becas.

La asignación de recursos y la planificación de incentivos constituyen un desafío complejo que requiere la consideración de múltiples parámetros. En nuestro estudio, nos centramos específicamente en la distribución equitativa de recursos entre agentes según su desempeño y nivel en una estructura de escalafón. Esto implica determinar las cantidades o montos de incentivos a asignar a cada agente con base en criterios específicos, así como establecer la periodicidad y el número de rondas de entrega. Es importante destacar que, en la implementación de programas de incentivos, surge la incertidumbre sobre la disponibilidad de recursos durante todo el periodo de vigencia del programa. En casos donde el presupuesto asignado puede exceder los montos necesarios, nos enfrentamos al desafío adicional de distribuir el excedente de manera equitativa. En este contexto, existen estudios previos como el de Moulin (1987) que analizan la asignación de recursos para problemas de excedente, proporcionando y caracterizando reglas de reparto pertinentes.

Con el fin de ilustrar el problema del reparto de incentivos, consideremos una situación hipotética donde cierta universidad recibe una cantidad de dinero de parte del gobierno, r, para repartir entre un conjunto de profesores (agentes) como parte de un programa de incentivos o recompensas. Supongamos además que existe un reglamento que evalúa el desempeño de los profesores en digamos m categorías, por ejemplo, docencia, investigación, divulgación de la ciencia, trabajo de gestión académica y antigüedad, y que esta evaluación se basa en algún sistema de puntajes, cuya información puede resumirse en una matriz llamada de desempeño (x_{ij}), donde i es la categoría y j una etiqueta para cada uno de los participantes. Note que el reparto se podría hacer sólo con base en el desempeño del agente en las categorías. Sin embargo, es común que con base en esta matriz y ciertas reglas previamente preestablecidas se ubique en un nivel a cada profesor, y que a su vez nos da cuenta de la cantidad de dinero que recibirá como incentivo, expresada en múltiplos de una unidad previamente establecida. Por ejemplo, al nivel 1 se le asigna una unidad (digamos 50 dólares), al nivel 2, 2(50 dólares) = 100 dólares, y así sucesivamente.

Sánchez-Sánchez y Olvera-López (2011) presentan una solución de reparto de incentivos, donde se considera como dato importante el desempeño de los agentes en cada categoría analizada y de esta forma asigna el recurso a cada agente, es decir, se tiene un monto a repartir de $r \in \mathbb{R}$ y un conjunto de agentes, *N*, entonces el monto que recibe cada agente, r_i, está dado con base en su desempeño en las categorías, x_{ij}, y además cumple con $\sum_{i \in N} r_i = r$. En este caso, los montos otorgados a cada agente, r_i, podrían ser distintos, mientras que en el sistema por niveles están agrupados (sólo hay tantos valores distintos como grupos).

Otra solución al reparto de incentivos es el de asignar a cada agente con base en su desempeño y repartir el excedente según algún criterio (a este reparto se le conoce como igualitario o proporcional).

En contraste al reparto de incentivos se encuentra la asignación por multi-categorías (en inglés multi-issues allocation) o con referencias múltiples (Sánchez, 2016), que generaliza el problema de reparto clásico (ver Bergantiños et al., 2010; Calleja, et al., 2005; González-Alcón et al., 2007) y en el cual cada agente reclama una parte del estado.

Motivados por la necesidad de mejorar la equidad y eficiencia en la distribución de incentivos, este trabajo propone una alternativa de reparto por niveles. La conciliación entre el reparto categórico, presentado en Sánchez-Sánchez y Olvera-López (2011), y el sistema de evaluación por niveles, es fundamental para abordar las limitaciones de los enfoques convencionales. La eficiencia de nuestra propuesta se evaluará mediante la capacidad de garantizar una distribución equitativa y justa de los incentivos entre los agentes, teniendo en cuenta tanto su desempeño como su nivel en la estructura de escalafón. Para lograr esto, definimos los niveles como grupos o conglomerados en los que se clasifican los agentes después de la evaluación. Cada agente pertenece a un solo nivel y todos los agentes en el mismo nivel recibirán la misma cantidad de incentivo. Además, garantizamos que el total del incentivo disponible se distribuya de manera equitativa entre todos los niveles, lo que permite maximizar el impacto de los recursos disponibles.

Este artículo está organizado de la siguiente manera. En la primera sección, se presentan algunos preliminares de problemas de reparto. En la siguiente sección, se deduce la propuesta de acuerdo con el nivel de los agentes y se prueba el resultado. Luego, los ejemplos numéricos de reparto. Finalmente, se presentan las conclusiones.

Preliminares

En esta sección se presentan antecedentes relevantes sobre problemas de reparto y asignación de recursos/incentivos. Se abordan distintas variantes del problema, incluyendo situaciones de recurso escaso, abundante, ausencia de restricciones sobre el recurso y el desafío específico de la asignación de incentivos. Al explorar estas diferentes condiciones y escenarios, se busca establecer una base sólida para comprender la complejidad del problema y las diversas consideraciones que influyen en la distribución equitativa de recursos. Además, se analizan posibles soluciones y enfoques utilizados en la literatura para abordar estos problemas, lo que proporciona un marco de referencia para evaluar la eficacia y relevancia de la alternativa propuesta en este trabajo. Al identificar los pros y contras de cada enfoque presentado, se pretende contextualizar y justificar la selección del enfoque adoptado en este estudio, así como resaltar la contribución única que aporta nuestra propuesta al campo de la distribución de recursos/incentivos.

Problema de bancarrota

Supongamos que tenemos la terna (N, d, r) donde N es el conjunto de agentes, $d = (d_i)_{i \in N}$ es el vector de demandas, con d_i la demanda del agente i, y $r \in \mathbb{R}$ es la cantidad a repartir.

Una situación de bancarrota se presenta si la demanda total, resultante de la acumulación de las demandas de cada agente, excede al capital/recurso disponible a repartir entre todos los agentes. Una solución a este problema es una regla de reparto que proporciona una distribución razonable de la cantidad del bien a repartir como función de las demandas de los agentes. O'Neill (1982) presentó un convincente modelo matemático a este problema. Propuso varias metodologías para adjudicar reclamaciones conflictivas, y proporcionó reglas sobre la base de estas metodologías. Algunas propiedades del juego de bancarrota se pueden encontrar en Curiel et al., (1987).

El artículo presentado por Thomson (2003) trata de la asignación de la liquidación después de que una empresa quiebra, utilizando la teoría de juegos cooperativos y formulando propiedades de reglas cuando la población de agentes es fija o cuando varía. Recientemente, Thomson

(2015) presentó una actualización. Estas referencias presentan una revisión detallada sobre los problemas de bancarrota y sus reglas de reparto.

En la literatura existen diferentes soluciones al problema de bancarrota. Por ejemplo, la regla proporcional dada por $P_i = \frac{rd_i}{\sum_{j\in N} d_j}$ con $i \in N$, la regla de ganancias igualitarias (dado por $CEA_i = \min\{d_i, \xi\}$, donde ξ es el único número real no negativo que cumple con $\sum_{i\in N} CEA_i = r$, i.e., todos los agentes reciben ξ excepto quienes demandan menos que ξ, que reciben su demanda) y la regla de pérdidas igualitarias (Herrero y Villar, 2002) dada por $CEL_i = \max\{d_i - \xi, 0\}$ para todo $i \in N$ y ξ es el único número real tal que $\sum_{i\in N} CEL_i = r$.

Una generalización al problema clásico de bancarrota lo presenta Calleja et al. (2005), donde las demandas se consideraron multidimensionales, representando los distintos ámbitos o categorías donde los agentes tienen demandas en cada uno de ellos. Así pues, en vez de tener solo un valor, se tiene un vector de demandas para cada agente y el modelo quedaría como (M, N, d, r) donde M es el conjunto de ámbitos sobre los que se demanda y $d = (d_{ij})_{i\in M, j\in N}$ es la matriz que contiene dichas demandas. La solución a este problema está dada como un vector en $\mathbb{R}^N$, indicando el reparto para cada agente. Además, otra solución fue propuesta por Bergantiños (2010), donde se especifica la cantidad que recibe cada agente en cada ámbito, es decir, se tiene una matriz solución en $\mathbb{R}^{M\times N}$. Los autores presentan una caracterización axiomática de la regla proporcional. Sin embargo, considerando este enfoque, la cantidad que reciben en un ámbito no se lo pueden gastar en otro, mientras que en el modo propuesto por Calleja et al. (2005) pueden gastar su asignación como quieran.

Recientemente, Bergantiños et al. (2018) presentaron una regla de dos etapas al problema propuesto por Calleja et al. (2005). Primero, dividieron el recurso entre los ámbitos siguiendo la regla de ganancias igualitarias restringidas. En segundo lugar, el monto asignado a cada ámbito se divide entre los agentes en proporción a sus demandas en este ámbito.

Problema de excedente

Un problema de asignación importante es cuando el recurso es abundante de tal forma que la acumulación de las demandas es menor que el recurso disponible, es decir, hay un excedente de recurso, a saber $r - \sum_{i\in N} d_i$, y habría que repartirlo entre los agentes. Este problema lo aborda ampliamente Moulin (1987).

El problema de reparto de recursos o incentivos es un tipo de problema de excedente que ha sido abordado considerando diferentes aspectos, como son las prioridades, los tipos de niveles, diferentes bienes, entre muchos otros. Frecuentemente el reparto de incentivos a los agentes se hace utilizando una regla de reparto proporcional o bien asignando la demanda de cada agente, d_i, más un factor —repartiendo el excedente en partes iguales—, esto es, el agente i tendrá un reparto de:

$$r_i = d_i + \frac{r - \sum_{j\in N} d_j}{n}, \qquad (1)$$

donde *n* es el cardinal de *N*.

La fracción de la parte derecha de la **Ecuación 1** es independiente del nivel obtenido por el agente *i*, y cuando el recurso disponible es grande, es decir $r \gg \sum_{j\in N} d_j$, se le asigna prácticamente lo mismo a todos los agentes, no importando su nivel, premiando de alguna manera a los agentes más débiles.

Problema de reparto sin restricciones

En Herrero et al. (1999) consideraron el problema de distribuir una cantidad dada de un bien divisible entre un conjunto de agentes que pueden tener derechos individuales, proponiendo la solución igualitaria de derechos. Esta regla de asignación divide equitativamente entre los agentes la diferencia entre los derechos agregados y la cantidad del bien disponible. Una característica relevante del análisis desarrollado es que no se establece ninguna restricción de signo sobre los parámetros del modelo (es decir, el derecho agregado puede exceder o no alcanzar la cantidad del bien, los derechos de los agentes pueden ser positivos o negativos, la asignación puede implicar una redistribución de las propiedades de los agentes, etc.). Este artículo proporciona varias caracterizaciones de esta regla y analiza su soporte teórico del juego.

Problema de asignación de incentivos

Supongamos ahora que en vez de demandas se tienen desempeños —denotados por X—, es decir, los agentes tienen cierto desempeño en los distintos ámbitos o categorías y la asignación del recurso es con base en este desempeño. Note que en este caso ya no se aplica la restricción de que el recurso es escaso (bancarrota). Este problema de reparto ha sido analizado por Sánchez-Sánchez y Olvera-López (2011). El modelo sería (M,N,X,r) siendo M el conjunto de categorías, N el de agentes, $X=(x_{ij})_{i\in M,\, j\in N}\in\mathbb{R}^{M\times N}$ la matriz de desempeños (i.e., x_{ij} denota el desempeño del agente j en la categoría i) y r el recurso que se va a distribuir.

El artículo de Sánchez-Sánchez y Olvera-López (2011) proporciona una forma para encontrar el reparto para cada agente, r_j, $j\in N$, tal que $\sum_{j\in N} r_j = r$. Sean $\{\beta_m\}_{m\in M}$, con $\beta_m\in\mathbb{R}$, un conjunto de constantes que representan el peso de cada categoría (note que estos pesos pueden incluso ser negativos). Luego, la regla de reparto de incentivos para el agente *j* está dada por

$$r_j=\frac{r}{n}+\sum_{m\in M}\beta_m\left(x_{mj}-\bar{X}_m\right),\ \ j\in N \qquad (2)$$

donde $\bar{X}_m$ denota el desempeño promedio de los agentes en la categoría m, i.e., $\bar{X}_m=\frac{\sum_{j\in N} x_{mj}}{n}$.

La regla de reparto (**Ecuación 2**) se interpreta como que cada agente recibe la misma parte del recurso, ($\frac{r}{n}$), y después se penaliza o bonifica con base a su desempeño en cada categoría. Note que al aplicar esta regla de reparto, el recurso asignado al agente *j*, r_j, $j\in N$, es independiente del nivel al que pertenece, es decir, los agentes que están en el mismo nivel reciben distintos montos. En la **Figura 1**; se ilustra con datos simulados, un ejemplo de la regresión lineal simple entre el reparto de incentivos con base en el desempeño y el respectivo nivel de los agentes.

A continuación presentaremos el caso de reparto de incentivos con desempeños multidimensionales y una estructura de niveles.

Metodología

En esta sección se propone una fórmula de reparto de incentivos analizando la relación entre la clasificación de agentes y su asignación de recurso de acuerdo con Sánchez-Sánchez y Olvera-López (2011).

Definamos el modelo $(M,N,X,r,L,(F_i)_{i\in L},Q,(Q_i)_{i\in L},A)$ donde

- $M=\{1,\ldots,m\}$ es el conjunto de categorías,
- $N=\{1,\ldots,n\}$ es el conjunto de agentes,
- $X\in\mathbb{R}^{M\times N}$ es la matriz de desempeños,
- $r\in\mathbb{R}$ es la cantidad a repartir,
- $L=\{1,\ldots,\ell\}$ es el conjunto de niveles,
- F_i con $i\in L$, es el número de agentes por nivel, o frecuencias por niveles,
- Q es un monto fijo, puede ser, por ejemplo, un salario mínimo o la Unidad de Medición y Actualización (UMA),
- Q_i con $i\in L$, es el número de montos a repartir en cada nivel,
- y A es el número de rondas o veces que se pueden repartir los incentivos, de acuerdo con el nivel obtenido por los agentes.

En la **Tabla 1** se ejemplifica la información del número de montos Q_i y el número de agentes que obtuvieron el nivel i, denotado por F_i, para $i\in L$. Cabe hacer notar que $\sum_{i=1}^{\ell} F_i = n$.

Estamos interesados en determinar un

monto único para cada nivel, por lo que realizaremos una regresión lineal simple entre el reparto r_j, obtenido por cada agente usando la **Ecuación 2**, y el número de montos del agente, acorde con su nivel, denotado por q_j, $j \in N$ (note que el número de montos está dado de acuerdo con el nivel de cada agente). Si $r = (r_1, \ldots, r_n)$ y $q = (q_1, \ldots, q_n)$, entonces el modelo de regresión simple estará dado por $r = \eta_0 + \eta_1 q$, donde η_0 y η_1 son los parámetros del modelo, que al evaluarse en cada uno de los montos correspondientes a los niveles, obtenemos el reparto para cada agente del nivel i, el cual está dado por

$$R_i = \eta_0 + \eta_1 Q_i, \quad i \in L \tag{3}$$

donde los estimadores de los parámetros por mínimos cuadrados de la regresión (ver James et al., 2013) están dados por:

$$\eta_1 = \frac{\sum_{j \in N} \left(r_j - \bar{R}\right)\left(q_j - \bar{Q}\right)}{\sum_j \left(q_j - \bar{Q}\right)^2} \tag{4}$$

$$\eta_0 = \bar{R} - \eta_1 \bar{Q} \tag{5}$$

donde $\bar{R} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_j = \frac{r}{n}$ y $\bar{Q} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} q_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\ell} F_i Q_i$.

Por otro lado, considerando la regla del reparto del problema de incentivos con desempeños multidimensionales dado en la **Ecuación 2**, se tiene que las β_m son arbitrarias, si en particular, estos pesos están dados por $\beta_m = \frac{f}{\alpha}$, donde f, $\alpha \in \mathbb{R}$, con $\alpha \neq 0$, son constantes que definiremos posteriormente, entonces la regla de reparto para el agente j quedaría como sigue

$$r_j = \frac{r}{n} + \sum_{m \in M} \frac{f}{\alpha}\left(x_{mj} - \bar{X}_m\right), \qquad j \in N. \tag{6}$$

Note que al elegir a todos los β_m iguales estamos asignando a cada categoría el mismo peso. Sea $C_j = \sum_{m \in M}\left(x_{mj} - \bar{X}_m\right) \in \mathbb{R}$ la constante que suma sobre todas las categorías la diferencia entre el desempeño del agente j y el desempeño promedio.

Luego, la **Ecuación 6** la podemos reescribir como $r_j = \frac{r}{n} + \frac{f}{\alpha} C_j$, lo cual sustituimos en **Ecuación 4** y obtenemos que el parámetro η_1 está dado por

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \frac{\sum_{j \in N}\left(\left(\frac{r}{n} + \frac{f}{\alpha} C_j\right) - \bar{R}\right)\left(q_j - \bar{Q}\right)}{\sum\left(q_j - \bar{Q}\right)^2} \\
&= \frac{\sum_{j \in N}\left(\left(\bar{R} + \frac{f}{\alpha} C_j\right) - \bar{R}\right)\left(q_j - \bar{Q}\right)}{\sum_{j \in N}\left(q_j - \bar{Q}\right)^2} \\
&= \frac{\sum_{j \in N} \frac{f}{\alpha} C_j\left(q_j - \bar{Q}\right)}{\sum_{j \in N}\left(q_j - \bar{Q}\right)^2} \\
&= \frac{f}{\alpha} \frac{\sum_{j \in N} C_j\left(q_j - \bar{Q}\right)}{\sum_{j \in N}\left(q_j - \bar{Q}\right)^2}
\end{aligned}$$

haciendo $\alpha = \frac{\sum_{j \in N} C_j\left(q_j - \bar{Q}\right)}{\sum_{j \in N}\left(q_j - \bar{Q}\right)^2} \in \mathbb{R}$, entonces $\eta_1 = f$.

Sustituyendo esto en la **Ecuación 5**, obtenemos que el parámetro η_0 está dado por $\eta_0 = \bar{R} - f\bar{Q}$. Finalmente, sustituyendo ambos parámetros, η_0 y η_1 en la **Ecuación 3**, el reparto en el nivel i, para $i \in L$, está dado por:

$$\begin{aligned}
R_i &= \left(\bar{R} - f\bar{Q}\right) + fQ_i \\
&= \frac{r}{n} + f\left(Q_i - \bar{Q}\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Sumando el reparto de todos los agentes, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\ell} F_i R_i &= \sum_{i=1}^{\ell} F_i\left(\frac{r}{n} + f\left(Q_i - \bar{Q}\right)\right) \\
&= \frac{r}{n}\sum_{i=1}^{\ell} F_i + f\sum_{i=1}^{\ell} F_i Q_i - f\bar{Q}\sum_{i=1}^{\ell} F_i \\
&= \frac{r}{n} n + f\sum_{i=1}^{\ell} F_i Q_i - f\frac{\sum_{i=1}^{\ell} F_i Q_i}{n} n \\
&= r.
\end{aligned} \tag{8}$$

Es decir, efectivamente, se ha repartido todo el recurso disponible r, por lo que se dice que cumple la Ecuación de eficiencia. Note que esta Ecuación proviene de la regresión lineal y su eficiencia la toma del reparto por categorías.

Observe que aún es necesario determinar el valor de la constante f. Para ello, sea $A \in \mathbb{R}$ tal que $f = A \cdot Q$, por ejemplo, si $A \in \mathbb{Z}$ se podría definir como el máximo valor tal que $A \cdot Q \cdot \sum_{i=1}^{\ell} F_i Q_i \leq r$, luego, A indicaría el número de veces o rondas que se pueden repartir todos los incentivos de acuerdo al nivel obtenido. Entonces, la fórmula de reparto estará dada por

$$R_i = \frac{r}{n} + A \cdot Q\left(Q_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\ell} F_j Q_j\right), \\ = A \cdot QQ_i + \frac{1}{n}\left(r - A \cdot Q \sum_{j=1}^{\ell} F_j Q_j\right) \tag{9}$$

la cual asigna A veces el estímulo de cada nivel de manera completa, i.e., $A \cdot QQ_i$; más un enésimo del excedente, $\frac{1}{n}\left(r - A \cdot Q\sum_{j=1}^{\ell} F_j Q_j\right)$.

Ahora bien, si $A = 1$, además de tener el caso donde se reparte una vez los montos asignados a cada nivel, tenemos el reparto usual, es decir, donde el sobrante se divide entre todos los agentes por igual, ver **Ecuación 1**.

Observación 2.1

Supongamos que las demandas son iguales a los desempeños de los agentes dados por $x_i = Q \cdot Q_i$, para $i \in L$, entonces la **Ecuación 9** *se podría escribir como*

$$R_i = \frac{r}{n} + A(x_i - \bar{x}), \quad i \in L \tag{10}$$

donde $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\ell} F_j x_j$.
Y por otro lado, reescribiendo la **Ecuación 1** *en términos de desempeños observamos que $r_i = \frac{r}{n} + (x_i - \bar{x})$, es decir, el reparto usual es un caso particular de la* **Ecuación 10** *cuando $A = 1$ e $i \in L$. Además, si $A = \frac{r}{\sum_{j\in L} F_j x_j}$ entonces $R_i = r\frac{x_i}{\sum_{j\in L} F_j x_j}$, el cual coincide con la regla proporcional (ver Casares y Plata, 2020). Inclusive, A prodía ser diferente para cada nivel i, i.e.,*

$$R_i = \frac{r}{n} + A_i(x_i - \bar{x}), \quad i \in L \tag{11}$$

donde $A_i \in \mathbb{R}$ representa el peso que tiene el nivel i, $i \in L$, condicionado a que $\sum_{i=1}^{\ell} F_i R_i = r$.

Propiedades

Ahora describiremos algunas propiedades —axiomas— de las soluciones de reparto que nos permitirán elegir una solución sobre otra a través de las propiedades que se satisfacen, y así contar con un criterio metodológico que justifique la elección.

Sea $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_\ell)$ el vector con los desempeños para cada nivel, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^{\ell}$. Así, un problema de reparto será una dupla (x, r) y una solución será un *L*-vector $\psi(\boldsymbol{x}, r)$ cuya i-ésima componente está definida como $\psi_i(\boldsymbol{x}, r): \mathbb{R}_+^{\ell} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

La primera propiedad que definiremos señala que si las demandas asignadas a dos niveles son iguales, entonces ambos niveles obtendrán la misma cantidad.

Axioma 2.1

(Tratamiento igualitario) Una solución ψ satisface el axioma de tratamiento igualitario. Si para agentes en los niveles i y j, i, $j \in L$, con desempeños $x_i = x_j$, entonces

$$\psi_i(\boldsymbol{x}, r) = \psi_j(\boldsymbol{x}, r).$$

El siguiente axioma es estándar en la literatura de Teoría de Juegos cooperativos y asegura que se reparte el total del recurso.

Axioma 2.2

(Eficiencia) Una solución ψ satisface el axioma de eficiencia si

$$\sum_{i=1}^{\ell} F_i \psi_i(\boldsymbol{x}, r) = r$$

para cada $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^{\ell}$ y $r \in \mathbb{R}$.

Axioma 2.3

(Aditividad) Para una pareja de vectores $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}_+^{\ell}$ y $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, una solución ψ satisface el axioma de aditividad si

$$\psi(\boldsymbol{x}_1, r_1) + \psi(\boldsymbol{x}_2, r_2) = \psi(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, r_1 + r_2).$$

Proposición 2.1

La solución presentada en la **Ecuación 10**, *con* $\psi_i(\boldsymbol{x},r) := \frac{r}{n} + A(x_i - \bar{x}),\ i \in L$, *satisface las propiedades de tratamiento igualitario, eficiencia y aditividad.*

Dem.

Tratamiento igualitario: si $x_i = x_j$ se tiene que

$$\psi_i(\boldsymbol{x},r) = \frac{r}{n} + A(x_i - \bar{x}) = \frac{r}{n} + A(x_j - \bar{x}) = \psi_j(\boldsymbol{x},r).$$

Eficiencia:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \psi_i(\boldsymbol{x},r) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{r}{n} + A(x_i - \bar{x})\right) = r + A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x}\right)\\ &= r + A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = r.\end{aligned}$$

Aditividad:

$$\begin{aligned}\psi_i(\boldsymbol{x},r) + \psi_i(\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{r}) &= \left(\frac{r}{n} + A(x_i - \bar{x})\right) + \left(\frac{\tilde{r}}{n} + A(\tilde{x}_i - \bar{\tilde{x}})\right)\\ &= \frac{r+\tilde{r}}{n} + A(x_i + \tilde{x}_i - (\bar{x} + \bar{\tilde{x}}))\\ &= \psi_i(\boldsymbol{x} + \tilde{\boldsymbol{x}}, r + \tilde{r}).\end{aligned}$$

Corolario 2.1

La solución presentada en la **Ecuación 11**, *con* $\psi_i(\boldsymbol{x},r) := \frac{r}{n} + A_i(x_i - \bar{x}), i \in L$, *y las* A_i *definidas de tal manera que* $\sum_{i=1}^{\ell} F_i R_i = r$, *satisface las propiedades de tratamiento igualitario con* $A_i = A_j$, *eficiencia y aditividad.*

Ejemplos numéricos

A continuación se presentan tres ejemplos donde se aplica la regla de reparto obtenida en este trabajo. El primer ejemplo presenta un análisis del reparto mensual del estímulo otorgado por el Sistema Nacional de Investigadoras e Investigadores en México. El segundo aborda una situación de reparto de un estímulo económico a profesores universitarios acorde a su nivel obtenido debido a su desempeño docente. El tercer ejemplo trata sobre el reparto del presupuesto de egresos del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (Conahcyt) de México o también llamado Ramo 38.

Sistema Nacional de Investigadoras e Investigadores de México

El Sistema Nacional de Investigadoras e Investigadores (SNII) —antes llamado Sistema Nacional de Investigadores (SNI)— es un programa de estímulos que se otorga a científicos mexicanos como complemento de su sueldo, con base esencialmente, en su productividad académica y formación de recursos humanos. Los investigadores se clasifican en cinco niveles, conforme al Diario Oficial de la Federación reciben apoyos económicos en términos de UMAs. La UMA es la referencia económica en pesos para determinar la cuantía del pago de las obligaciones y supuestos previstos en las leyes federales mexicanas; cuyo valor mensual en 2022 fue de Q = \$2, 925.09 pesos mexicanos.[1]

En la **Tabla 2** se muestran los niveles (exceptuando los investigadores Eméritos), el número de UMAs por nivel,[2] su equivalente estímulo mensual y el número de investigadores que en 2021 había en cada nivel.[3] Con base en esta información, mensualmente se requiere mínimo la cantidad de $Q \cdot \sum_{i=1}^{4} F_i Q_i$ = \$628, 976, 252.52 pesos mexicanos para repartir entre los investigadores de México.

Si, por ejemplo, se tiene la cantidad $r = \$731,875,069$ para repartirla mensualmente a los investigadores de acuerdo a su nivel, en este caso solo se reparte el dinero en una ronda a los investigadores y representa el reparto usual. Aplicando la **Ecuación 1**, en la **Tabla 3** se presenta una propuesta de reparto para cada nivel.

Ahora supongamos que el recurso mensual

1 https://www.inegi.org.mx/temas/uma/

2 https://dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5660859&fecha=10/08/2022#gsc.tab=0

3 http://dgeiawf.semarnat.gob.mx:8080/ibi_apps/WFServlet?IBIF_ex=D4_CYT00_02_1&IBIC_user=dgeia_mce&IBIC_pass=dgeia_mce&NOMBREANIO=*

disponible es mayor a la cantidad requerida para repartir el estímulo a los investigadores por dos meses, por ejemplo, $r = \$1,300,000,000$. En la **Figura 2** se presentan tres tipos de reparto usando la **Ecuación 10**: el reparto usual, i.e., considerando $A = 1$, una propuesta de reparto con $A = 1.5$ y el reparto proporcional, i.e., $A = 2.06685$.

Note que el reparto usual discrimina menos por nivel, pues el excedente se reparte a todos por igual, y mientras mayor sea el excedente, menos diferencia habrá por nivel. A los candidatos a investigadores, nivel C, el reparto usual les da más recurso que los otros dos tipos de reparto, pues como se había mencionado anteriormente, el reparto usual le otorga la demanda de cada nivel más cierta cantidad de dinero a todos los niveles, a saber $\frac{1}{n}\left(r - \sum_{i=1}^{\ell} F_i Q_i\right) = 19,075.1$ pesos mexicanos. Los investigadores SNII 1, obtienen prácticamente el mismo recurso con los tres tipos de reparto. Sin embargo, los investigadores SNII 2 y SNII 3 obtienen más recurso si $A > 1$. Así pues, con la propuesta de reparto considerando $A = 1.5$, mediamos los repartos entre el usual y el proporcional. Observe que si $A > \frac{r}{\sum_{j \in L} F_j x_j}$, entonces se discriminará más entre los niveles pero ya no se asegura la positividad de los repartos.

Universidad

El Programa de Estímulos al Desempeño del Personal Docente (PEDPD) es un programa del gobierno federal de México cuyo propósito es "reafirmar el trascendente papel de los educadores en el proceso de enseñanza y aprendizaje" (Secretaría de Educación Pública, s.f.) en las universidades públicas de México. Dicho programa se rige por normas generales, planteadas por la Secretaría de Educación Pública, aplicadas mediante un reglamento propio de cada universidad o institución de educación superior (IES) emitiendo una convocatoria anual.

Dicho estímulo se reparte, en múltiplos de una UMA. Al igual que en el caso del SNII, en particular, al nivel 1 se le otorga 1 UMA, al nivel 2, 2 UMAs, y así sucesivamente hasta el nivel l. Así pues, supongamos que cierta universidad debe distribuir *r* cantidad de dinero al año entre sus 256 profesores que están clasificados en 7 distintos niveles.

La **Tabla 4** muestra la frecuencia de profesores en cada nivel y el número de UMAs que les corresponde.

Acorde con la información de la **Tabla 4**, la demanda mensual de la universidad es de \$3,121,071 y la demanda anual es de \$37,452,852. Visto de otro modo, en la **Tabla 5** se presentan las demandas mensuales acumuladas. Ahora bien, consideremos que a la universidad le asignan solamente $r = \$34,000,000$. Luego, la Universidad no podrá repartir el incentivo a sus profesores durante todo el año, de hecho, podrá hacerlo hasta el mes de octubre (ver **Tabla 5**).

Considerando la **Ecuación 10** y tres tipos de reparto: el reparto usual ($A = 1$), una propuesta de reparto con $A = 5$ y el reparto proporcional ($A = 10.8937$), en la **Figura 3** se presentan los porcentajes que cada tipo de reparto le otorga a cada nivel.

Del total del recurso asignado, el reparto usual le otorga mayor recurso a los niveles 1, 2 y 3 que las otras dos opciones de reparto (propuesta y proporcional), los tres tipos de reparto otorgan prácticamente la misma proporción de incentivos al nivel 4, mientras que el reparto proporcional le otorga mayor recurso a los niveles 5, 6 y 7. Si interpretamos a *A* como el número de rondas, podríamos concluir que a mayor número de rondas, mayor es el beneficio para los niveles más altos, y viceversa. Note además, que el reparto proporcional correspondería a $A = 10.8937$ rondas, reparto que normalmente se aplica en las universidades.

Ramo 38

El ramo 38 del presupuesto de egresos de la federación de México concentra los recursos que el Conahcyt utiliza para su operación y sus programas, así como el subsidio de sus 26 centros públicos de investigación. En Herrera (2021), con base en la información de la cuenta pública 2021, presenta el gasto que fue ejercido directamente por el gobierno federal en cada una de las 32 entidades federativas de México por concepto de programas sujetos a reglas de operación como lo es el ramo 38.

El objetivo es estimar el proyecto de presupuesto de egresos de la federación (PPEF) 2022 para cada entidad federativa, que de acuerdo con Herrera (2021) se tienen para distribuir $r = \$132,997.40$ millones de pesos corrientes o también llamados actuales. Esto con el fin de contribuir a la toma de decisiones legislativas del senado de la república y apoyar en el ejercicio de sus facultades de supervisión y control.

Vale la pena aclarar que el presupuesto no distribuible incluye recursos que no pueden ser distribuidos por las entidades federativas, por ejemplo, algunos de ellos requieren de convenios de descentralización. En este ejemplo, los desempeños x_i son los presupuestos de egresos de la federación (PEF) del 2021 de cada entidad y fueron tomados del Cuadro 4 de Herrera (2021), (ver **Tabla 6**). Así pues, con base en estos datos se tiene que la demanda promedio para el ramo 38 es $\bar{x} = \$3,644.473$ millones de pesos corrientes.

Consideremos tres tipos de reparto: usual ($A = 1$), propuesta (tomando distintos valores $A_i \in \mathbb{R}$, calculados de la siguiente manera $A_i = \frac{V_i - r/n}{x_i - \bar{x}}$ donde V_i es el proyecto de presupuesto de egresos para el 2022 dado por Herrera (2021) para la Entidad i, (ver **Tabla 6**) y proporcional ($A = 1.105845$). Utilizando la **Ecuación 10** y **Ecuación 11**, en la **Figura 4** se presentan los presupuestos de egresos de cada entidad federativa considerando estos tres tipos de reparto.

El reparto usual otorga más gasto a todas las entidades excepto a la Ciudad de México y al Estado de México —denotado por México—, siendo que éstas tienen los mayores desempeños y se podría suponer que recibirían un mayor presupuesto, pero el reparto usual divide el recurso entre todos los estados, sin importar su desempeño. Con respecto a los repartos realizados con nuestra propuesta y la proporcional se pueden apreciar que tienen ligeras diferencias cuando los desempeños son bajos y más notorios conforme el desempeño es mayor. Además, cabe mencionar que los A_i fueron calculados de tal forma que el reparto coincida con los gastos públicos asignados en 2022, lo cual nos confirma que no se usó el reparto proporcional señalado por Herrera (2021).

Conclusiones

En este trabajo se ha abordado el tema de la asignación de incentivos entre agentes, los cuales están agrupados por niveles y que a su vez determinan el estímulo que recibirán.

Cabe señalar que el nivel asignado a cada agente se obtiene a partir de una evaluación previa. La propuesta metodológica se basó en una fórmula dada en la literatura sobre la distribución de incentivos que considera el desempeño individual de cada agente en diversas categorías, donde en general, todos los agentes obtienen distintos estímulos.

El afán de reconciliar el reparto por niveles y por desempeño individual, nos condujo a una fórmula de reparto de incentivos por niveles, obtenida mediante una regresión lineal simple, entre el reparto obtenido considerando el desempeño individual y el número de montos de estímulo asignados a cada agente. Esta solución cumple las mismas propiedades de la solución de reparto original, y en particular, reparte completamente el recurso disponible entre los agentes. Además, de que su implementación resulta muy sencilla y práctica.

Cabe señalar que esta solución está en términos de un parámetro A, que puede interpretarse como el número de rondas bajo ciertas condiciones, pero que resulta más general, pues modula el reparto entre niveles. Por ejemplo, con $A = 1$, obtenemos el reparto usual de excedentes, y con $A = \frac{r}{\sum_{j \in L} F_j x_j}$, obtenemos el reparto proporcional. Adicionalmente, este parámetro puede tomar distintos valores A_i, para cada nivel i, dando pie a una nueva regla de reparto que podría tomar relevancia en ciertos contextos.

Por otro lado, la solución de reparto encontrada en este trabajo admite una interpretación en términos de los desempeños, extendiendo su aplicación a otras áreas. Para mostrar su utilidad, se presentaron tres aplicaciones de la fórmula de reparto obtenida.

Las primeras dos son aplicaciones al reparto de incentivos para investigadores y profesores universitarios, suponiendo que existe un excedente en recurso disponible. En ambos casos, se mostró que el reparto usual es más ventajoso para los niveles cuyo desempeño es menor, en comparación con el reparto proporcional, y para ambos, se propuso un reparto que media entre ellos. Es importante señalar que el reparto usual podría considerarse "injusto", pues no toma en cuenta el desempeño o nivel obtenido por los agentes. En el último ejemplo, se utilizó nuestra propuesta como una alternativa al reparto del presupuesto de egresos en el contexto de ciencia y tecnología para México, mostrando que el reparto propuesto por Herrera (2021) no es proporcional, pero que puede ajustarse a nuestra regla considerando diferentes valores o pesos para cada nivel.

Así, nuestro estudio ofrece una contribución significativa a la literatura al proporcionar una alternativa innovadora para la distribución de recursos, especialmente en entornos donde se busca equilibrar la eficiencia con la equidad. En comparación con el reparto proporcional convencional, nuestra solución aborda de manera más justa las diferencias de desempeño entre los agentes, lo cual resulta crucial para garantizar una asignación equitativa de recursos. Al considerar el nivel alcanzado por cada agente en una estructura de escalafón y aplicar una regresión lineal simple entre el reparto de incentivos y el desempeño, nuestro método ofrece una distribución más ajustada y justa de los recursos disponibles. Además, nuestras aplicaciones en áreas como la investigación académica y la asignación de presupuestos en la ciencia y tecnología demuestran la versatilidad y aplicabilidad práctica de nuestra propuesta en diferentes contextos. Estos hallazgos tienen implicaciones significativas para la toma de decisiones en la distribución de recursos, sugiriendo un enfoque más integral y justo que puede adaptarse a una variedad de situaciones y necesidades específicas.

Al considerar las propiedades de nuestra propuesta de reparto de incentivos, es crucial destacar su capacidad para abordar situaciones tanto de bancarrota como de excedente, teniendo en cuenta el nivel de los agentes involucrados. A diferencia de los enfoques convencionales que pueden no ser capaces de manejar adecuadamente estas condiciones extremas, nuestra propuesta ofrece una solución más robusta y equitativa al garantizar la distribución justa de recursos incluso en situaciones de escasez o excedente. Esto se logra mediante la incorporación del nivel de los agentes como un factor clave en el proceso de asignación de incentivos, lo que permite adaptarse dinámicamente a las condiciones cambiantes y maximizar el impacto de los recursos disponibles. Además, al abordar directamente los desafíos de la bancarrota y el excedente, nuestra propuesta ofrece una mejora significativa sobre los enfoques tradicionales y establece un nuevo estándar para la distribución equitativa de incentivos en entornos dinámicos y complejos.

Tabla 1

Información de número de montos y frecuencias por niveles.

p.33

Nivel	Número de montos	Frecuencia
1	Q_1	F_1
2	Q_2	F_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
ℓ	Q_ℓ	F_ℓ

Tabla 2

Información del estímulo económico y número de investigadores SNII en México, 2021

p.36

Nivel	Núm. de montos Q_i	Estímulo mensual (Pesos mexicanos)	Frecuencia F_i
C	3	$8,775.27	9,168
1	6	$17,550.54	18,351
2	8	$23,400.72	4,968
3	14	$40,951.26	2,691

Tabla 3

Reparto mensual del SNII a los investigadores de acuerdo a su nivel, teniendo un presupuesto de $r = \$731,875,069$.

p.36

Nivel	Estímulo mensual (Pesos mexicanos)
C	$11,700.36
1	$20,475.63
2	$26,325.81
3	$43,876.35

Tabla 4
Datos de información de reparto de cierta universidad

p.37

Nivel	Monto Q_i UMA mensual	Frecuencia F_i
1	1	14
2	2	19
3	3	28
4	4	75
5	5	91
6	6	27
7	7	2

Tabla 5
Demanda mensual acumulada de la universidad

p.37

No.	Mes	Demanda mensual acumulada
1	Enero	$3,121,071
2	Febrero	$6,242,142
3	Marzo	$9,363,213
4	Abril	$12,484,284
5	Mayo	$15,605,355
6	Junio	$18,726,426
7	Julio	$21,847,497
8	Agosto	$24,968,568
9	Septiembre	$28,089,639
10	Octubre	$31,210,710
11	Noviembre	$34,331,781
12	Diciembre	$37,452,852

p.38

Tabla 6
Propuesta de pesos A_i para cada entidad federativa

Entidad	x_i	V_i	A_i	Entidad	x_i	V_i	A_i
Aguascalientes	113.9	129.3	1.10490	Morelos	559.1	650.4	1.09543
Baja California	1490.9	1600.5	1.12823	Nayarit	63.1	71.5	1.10536
Baja California Sur	656.2	685.9	1.11915	Nuevo León	640.7	727.9	1.09939
Campeche	45.7	55.0	1.10460	Oaxaca	143.1	162.8	1.10454
Coahuila	1492.8	1575.9	1.14066	Puebla	1046.8	1159.0	1.10531
Colima	81.5	95.7	1.10428	Querétaro	2190.6	2192.4	1.26409
Chiapas	596.6	637.3	1.11321	Quintana Roo	65.1	74.9	1.10503
Chihuahua	503.4	541.4	1.11071	San Luis Potosí	737.9	798.6	1.11183
Ciudad de México	95080.4	105924.1	1.11437	Sinaloa	256.96	289.3	1.10431
Durango	100.1	113.3	1.10511	Sonora	778.2	842.2	1.11225
Guanajuato	1195.0	1265.5	1.12870	Tabasco	102.3	116.1	1.10501
Guerrero	104.3	114.9	1.10597	Tamaulipas	152.9	173.5	1.10458
Hidalgo	1250.3	1280.0	1.14871	Tlaxcala	95.3	106.6	1.10550
Jalisco	1090.8	1214.7	1.10254	Veracruz	826.4	900.0	1.11077
México	5496.4	5961.5	1.04285	Yucatán	807.8	883.4	1.10934
Michoacan	691.1	760.3	1.10718	Zacatecas	103.3	120.6	1.10405
				No distribuible	1708.7	1772.8	1.16616

Figura 1

Ejemplo de regresión lineal simple entre el reparto de incentivos y considerando siete niveles

p.33

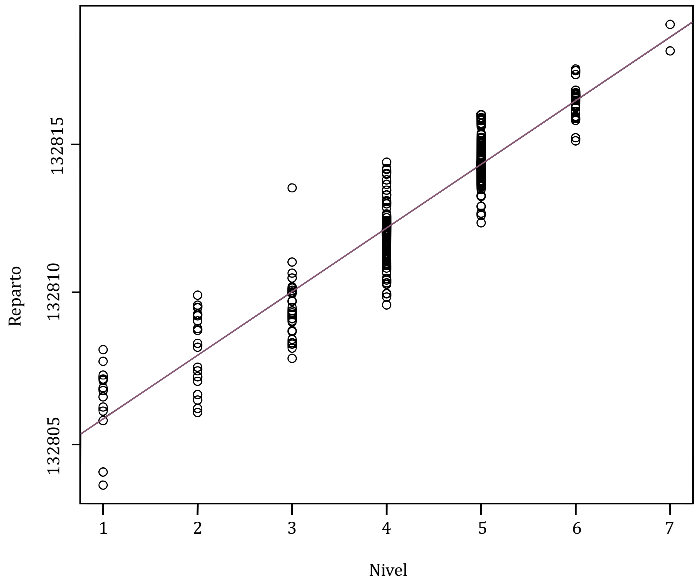


Figura 2

Propuestas de reparto mensual del SNII a los investigadores de México de acuerdo a su nivel, teniendo un presupuesto de $r = \$1,300,000,000$.

p.37

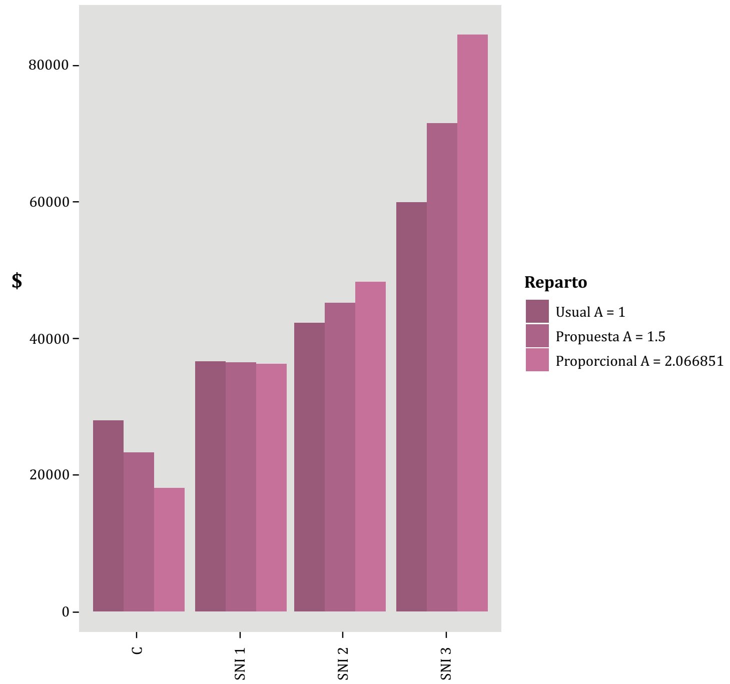
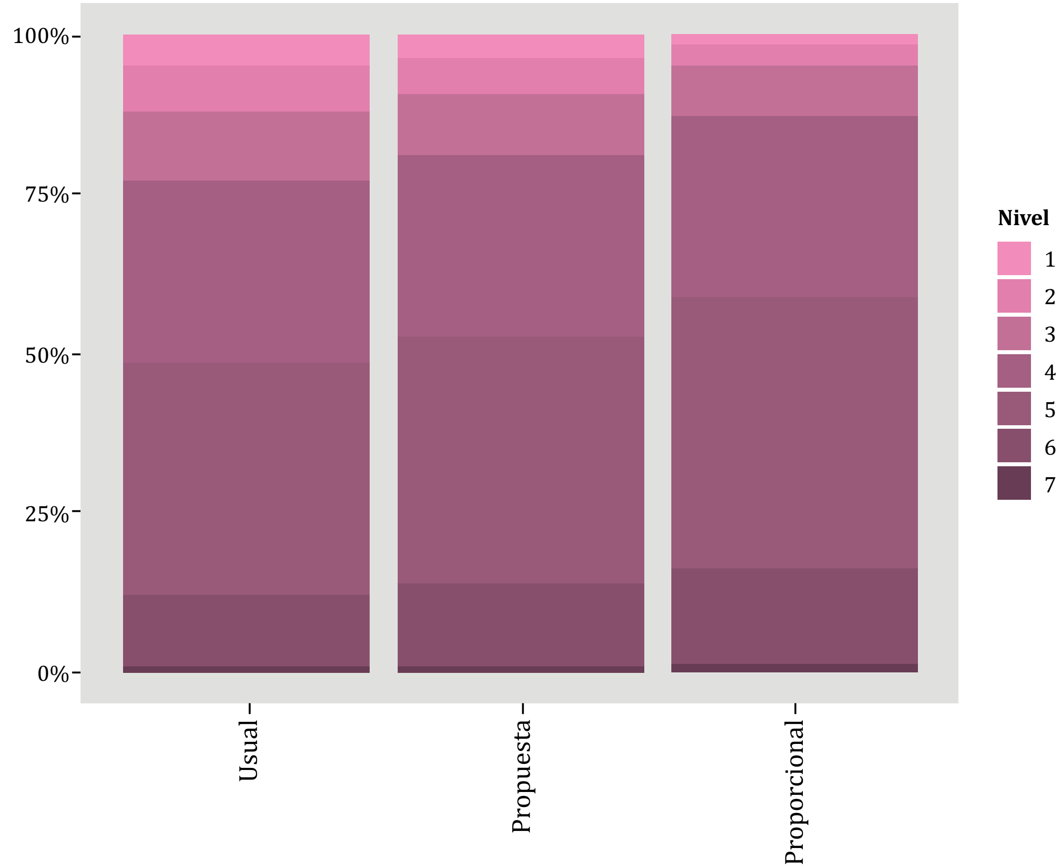


Figura 3

Porcentaje del reparto de incentivos en cada nivel de la universidad considerando $r = \$34{,}000{,}000$ y las opciones de reparto usual $A = 1$, propuesta $A = 5$ y proporcional $A = 10.8937$.

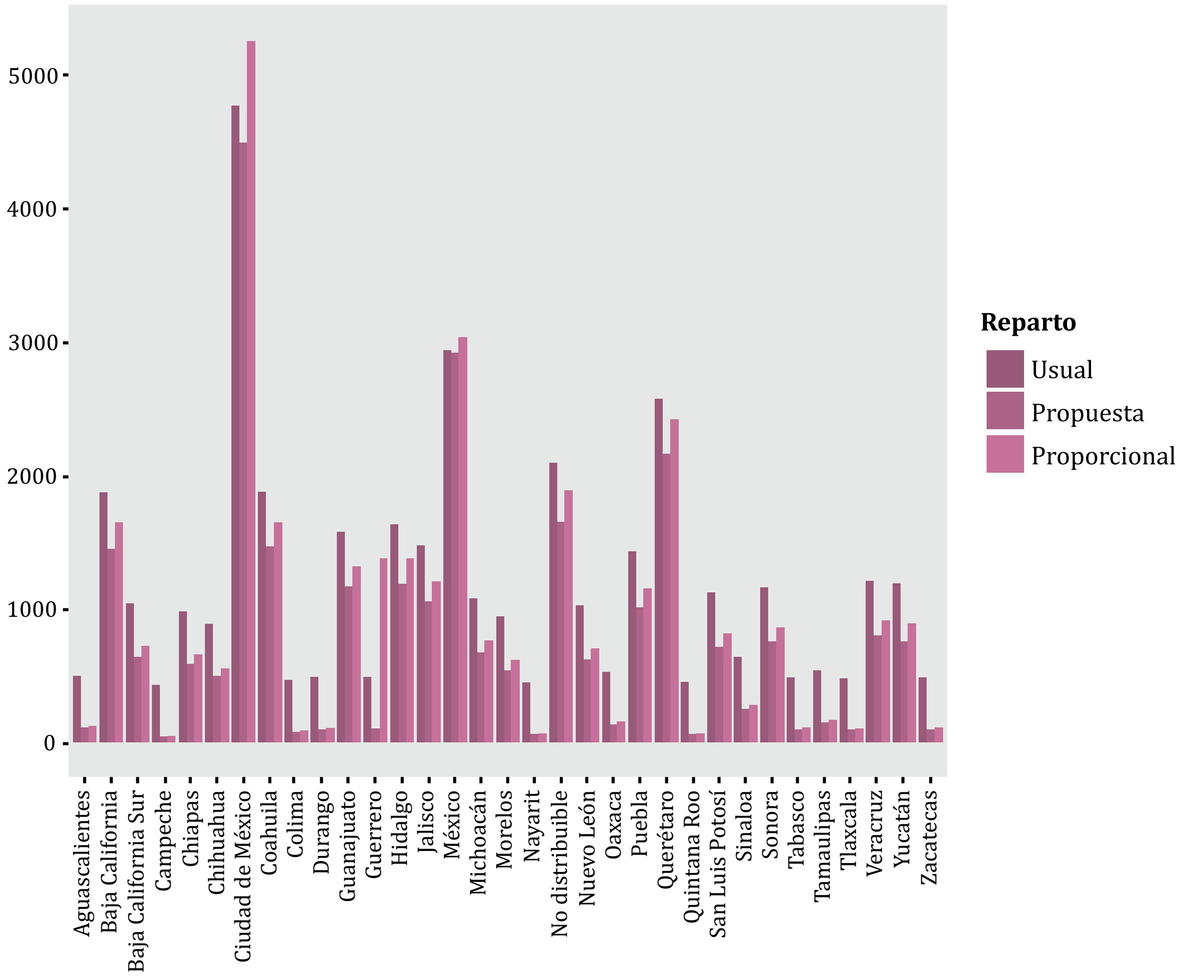


p.37

Figura 4

Gasto federal por entidades federativas de acuerdo al ramo 38 utilizando tres opciones de reparto: usual $A = 1$, propuesta A_i (datos de la **Tabla 6**) y proporcional $A = 1.105845$. El dato de la Ciudad de México presentado en esta gráfica fue dividido entre 20 y el de México entre 2 para su mejor apreciación.

p.38



Referencias

Bergantiños, G., Chamorro, J. M., Lorenzo, L., & Lorenzo-Freire, S. (2018). Mixed rules in multi-issue allocation situations. *Naval Research Logistics*, 65(1), 66-77. https://doi.org/10.1002/nav.21785

Bergantiños, G., Lorenzo, L., & Lorenzo-Freire, S. (2010). A characterization of the proportional rule in multi-issue allocation situations. *Operations Research Letters*, 38(1), 17-19. https://doi.org/10.1016/j.orl.2009.10.003

Calleja, P., Borm, P., & Hendrickx, R. (2005). Multi-issue allocation situations. *European Journal of Operational Research*, 164(3), 730-747. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2003.10.042

Casares, E. R. and Plata, L. (2020). *Teoría económica aplicada*, 1st ed. Universidad Autónoma Metropolitana.

Curiel, I.J., Maschler, M. & Tijs, S.H. Bankruptcy games. *Zeitschrift für Operations Research* 31, A143–A159 (1987). https://doi.org/10.1007/BF02109593

González-Alcón, C., Borm, P., & Hendrickx, R. (2007). A composite run-to-the-bank rule for multi-issue allocation situations. *Mathematical Methods of Operations Research* (Heidelberg, Germany), 65(2), 339-352. https://doi.org/10.1007/s00186-006-0123-z

Herrera González, V. (2021). "Análisis de los recursos federales identificados para las entidades federativas en el proyecto de presupuesto de egresos de la federación 2022". https://bibliodigitalibd.senado.gob.mx/handle/123456789/5396

Herrero, C., Maschler, M., & Villar, A. (1999). Individual rights and collective responsibility: the rights–egalitarian solution. *Mathematical Social Sciences*, 37(1), 59-77. https://doi.org/10.1016/s0165-4896(98)00017-1

Herrero, C., & Villar, A. (2002). Sustainability in bankruptcy problems. *Top*, 10(2), 261-273. https://doi.org/10.1007/bf02579019

James, G., Witten, D., & Hastie, T. (2013). *An introduction to statistical learning: With applications in R*. Springer.

Moulin, H. (1987). Equal or proportional division of a surplus, and other methods. *International Journal of Game Theory*, 16(3), 161-186. https://doi.org/10.1007/bf01756289

Olvera-Lopez, W., Sanchez-Sanchez, F., & Tellez-Tellez, I. (2014). Bankruptcy problem allocations and the core of convex games. *Economics Research International*, 2014, 1-7. https://doi.org/10.1155/2014/517951

O'Neill, B. (1982). A problem of rights arbitration from the Talmud. *Mathematical Social Sciences*, 2(4), 345-371. https://doi.org/10.1016/0165-4896(82)90029-4

Sánchez, F. J. (2016). Reglas igualitarias para los problemas de reparto con referencias múltiples. *Revista de métodos cuantitativos para la economía y la empresa*, 22. https://doi.org/10.46661/revmetodoscuanteconempresa.2350

Sánchez-Sánchez, F. and Olvera-López, W. (2011). About incentives distribution. *Applied Mathematical Sciences*, 5(49), 2411–2423. https://www.m-hikari.com/ams/ams-2011/ams-49-52-2011/lopezAMS49-52-2011.pdf

Secretaría de Educación Pública. (s.f.). "Programa de estímulos al desempeño docente (2008-2009)".

Thomson, W. (2003). Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey. *Mathematical Social Sciences*, 45(3), 249-297. https://doi.org/10.1016/s0165-4896(02)00070-7

Thomson, W. (2015). Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: An update. *Mathematical Social Sciences*, 74, 41-59. https://doi.org/10.1016/j.mathsocsci.2014.09.002