# *La estructura lógica de la teoría clásica de las finanzas*

ADOLFO GARCÍA DE LA SIENRA[1]


- **Resumen:** En este artículo se presenta de manera completa, rigurosa y compacta, la teoría clásica de las finanzas (TF). No pretende introducir teoremas novedosos, sino sólo entretejerlos usando un método que nunca ha sido utilizado en la demostración de representaciones de utilidad: el teorema de Tarski (1957) sobre puntos fijos de retículos. Define explícitamente los conceptos típicos aplicados en la teoría y práctica de las finanzas a partir de la noción filosóficamente fundamental de la racionalidad: el concepto de preferencia. La contribución del trabajo consiste en presentar de manera compacta, ordenada, rigurosa y abstracta, las definiciones y teoremas fundamentales, así como en proveer demostraciones novedosas de éstos. El trabajo culmina ofreciendo una explicación general del conocido concepto de portafolio aprovechando el desarrollo abstracto que le precede. Es de esperarse que el trabajo tenga una utilidad didáctica en la enseñanza de la TF.

- **Abstract:** In the present paper classical financial theory (TF) is presented in a complete, rigorous and compact way. It does not intend to introduce novel theorems, but only to interweave them using a method that has never been used in the demonstration of utility representations: Tarski's (1957) theorem on fixed points of lattices. It defines explicitly the typical concepts applied in financial theory and practice, starting with the philosophically fundamental notion of rationality: the concept of preference. The contribution of the paper consists of presenting the fundamental concepts and theorems in a compact, orderly, rigorous and abstract way, as well as in providing novel proofs of the latter. The paper ends by offering a general explanation of the well-known concept of portfolio, taking advantage of the preceding abstract development. Hopefully, this work will be useful in the teaching of TF.


[1] Instituto de Filosofía, Facultad de Economía, Universidad Veracruzana, e-mail: asienrag@gmail.com. Agradezco los comentarios de los árbitros anónimos.

- **Palabras clave:** metodología de la economía, finanzas, utilidad esperada, riesgo, portafolios

- **Clasificación JEL:** B41, D81, G11

- Fecha de recepción: 28/09/2009 Aceptación: 10/05/2010


## *Motivación*

La TF, basada en la teoría de la utilidad esperada de John von Neumann y Oskar Morgenstern (1947), concibe los proyectos de inversión financiera como loterías en un sentido muy preciso y postula un concepto de racionalidad bastante plausible desde un punto de vista estadístico. Permite asimismo definir un concepto toral para la economía financiera: el concepto de *aversión al riesgo*. De la TF se desprende una metodología bien definida para la administración financiera. La teoría de la utilidad esperada de Von Neumann y Morgenstern; por otra parte, es también el fundamento de la teoría de la elección racional como se presenta en el famoso e importante texto clásico de Luce y Raiffa (1957).

Después de presentar con bastante detalle los fundamentos de la TF, procedo a definir los conceptos relevantes para las finanzas y a explicar los detalles metodológicos de su aplicación.

## *Fundamentos*

El concepto fundamental de la TF es el de preferencia regular (a veces llamada "racional"), el cual se introduce en la siguiente definición.

*DEFINICIÓN 1* $\mathfrak{P}$ *es una estructura de preferencia regular* syss existen $P$ y $\succsim$ tales que

(0) $\mathfrak{P} = \langle P, \succsim \rangle$;
(1) $P$ es un conjunto no vacío;
(2) $\succsim$ es una relación binaria sobre $P$;
(3) $\succsim$ es conectada; es decir, para todo $p, q \in P : p \succsim q$ o $q \succsim p$;
(4) $\succsim$ es reflexiva; es decir, para todo $p \in P : p \succsim p$;
(5) $\succsim$ es transitiva; es decir, para todo $p, q, r \in P$: si $p \succsim q$ y $q \succsim r$ entonces $p \succsim r$.

Decimos que una relación de preferencia que satisface las condiciones (2)–(5) de la definición 1 es regular. La siguiente definición introduce las relaciones que vienen lógicamente asociadas a $\succsim$.

*DEFINICIÓN 2* Sea $\langle P, \succsim \rangle$ una estructura de preferencia regular. Definimos los siguientes conceptos:

(1) Si $p, q \in P$, decimos que *p es estrictamente preferido a q* y escribimos $p \succ q$ syss no es el caso que $q \succsim p$. Decimos que $\succ$ *es la parte asimétrica de* $\succsim$.

(2) Si $p, q \in P$, decimos que *p es indiferente a q* y escribimos $p \sim q$ syss $q \succsim p$ y $p \succsim q$.

La relación $\succ$ es calificada como asimétrica porque efectivamente lo es. Ello se demuestra más abajo (véase el lema 1).

*DEFINICIÓN 3* $\mathfrak{P}$ es una *estructura de preferencia estricta* syss existen *P* y $\succ$ tales que

(0) $\mathfrak{P} = \langle P, \succ \rangle$;

(1) $\succ$ es la parte asimétrica de una relación de preferencia regular;

(2) $\succ$ es negativamente transitiva; es decir, para todo $p, q, r \in P$ tal que $p \succ q$ : o bien $p \succ r$, o bien $r \succ q$, o ambas cosas a la vez.

El siguiente lema es inmediato y solamente recoge las propiedades elementales de la relación de preferencia estricta.

*LEMA 1* Sea $\langle P, \succ \rangle$ una *estructura de preferencia estricta.* Entonces:

(1) $\succ$ es asimétrica; es decir, para todo $p, q, \in P$: si $p \succ q$ entonces no es el caso que $q \succ p$;

(2) $\succ$ es irreflexiva; es decir, para todo $p \in P$, no es el caso que $p \succ p$.

(3) $\succ$ es transitiva; es decir, para todo $p, q, r \in P, p \succ q$ y $q \succ r$ implican $p \succ r$.

(4) $\succ$ es acíclica; es decir, para toda secuencia finita $p_1, \ldots, p_n$ tal que $p_1 \succ p_2 \succ \ldots \succ p_{n-1} \succ p_n$ : no es el caso que $p_n \succ p_1$.

(5) $\succ$ es negativamente transitiva.

*Demostración*: Supóngase que $p \succ q$. Esto significa que $p \succsim q$ pero no $q \succsim p$. Si $q \succ p$ tendríamos que $q \succsim p$ pero no $p \succsim q$. Pero esto es incompatible con lo primero.

Si $\succ$ fuera reflexiva, tendríamos $p \succ p$ y, por la asimetría de $\succ$, inferiríamos que no es el caso que $p \succ p$, obteniendo una contradicción.

Supóngase que $p \succ q$ y $q \succ r$. Si $r \succsim p$, como $p \succ q$ implica $p \succsim q$, tendríamos $r \succsim q$, por la transitividad de $\succsim$. Pero ello contradice $q \succ r$.

Mostraré por inducción sobre la longitud de las secuencias la aciclicidad de $\succ$. Es inmediato, por la asimetría de $\succ$, que si $p_1 \succ p_2$ entonces no es el caso que $p_2 \succ p_1$. Supóngase que la proposición vale para $n-1$ y considérese la secuencia $p_1 \succ p_2 \succ \ldots \succ p_{n-1} \succ p_n$. Si $p_n \succ p_1$, tendríamos por transitividad que $p_{n-1} \succ p_1$, contrariamente a la hipótesis.

Finalmente, sean *p, q, r* elementos de *P* y supóngase que $p \succ q$. Si $r \sim q$, se tiene $p \succ r$; si $r \sim p$, se tiene $r \succ q$. Si *r* no es indiferente ni a *p* ni a *q*, sólo hay tres posibilidades: $r \succ p \succ q, p \succ r \succ q$ y $p \succ q \succ r$. En el primer caso se tiene $r \succ q$, en el segundo tanto $p \succ r$ como $r \succ q$, y en el tercero $p \succ r$.□

La motivación económica para introducir $\succ$ es la de comparar diferentes "loterías" sobre un cierto conjunto de "premios". El concepto de lotería se define, de manera precisa, como una distribución simple de probabilidad.

*DEFINICIÓN 4* Sea *X* un conjunto no vacío. Una *distribución simple de probabilidad sobre X* es una función $p: S \to [0,1]$, donde *S* es un subconjunto finito de *X*, tal que $p(x) > 0$ para todo $x \in S$, y $\sum_{x \in S} p(x) = 1$. El conjunto *S* es llamado *el soporte de p* y denotado como *'sop(p)'*. Si *p* y *q* son dos distribuciones simples de probabilidad sobre *X* y $\alpha \in [0,1]$, la *combinación convexa* $\alpha p + (1-\alpha) q$ de *p* y *q* se define como la función *r* definida sobre $T = sop(p) \cup sop(q)$ que asigna a $x \in T$ el número $\alpha p(x) + (1-\alpha) q(x)$, en el entendido de que $p(x) = 0$ si $x \notin sop(p)$ y $q(x) = 0$ si $x \notin sop(q)$.

*LEMA 2* Si *p* y *q* son distribuciones simples de probabilidad sobre *X*, la combinación convexa $r = \alpha p + (1-\alpha) q$ *de p y q* $(0 \le \alpha \le 1)$ también es una distribución simple de probabilidad sobre *X* con $T = sop(p) \cup sop(q)$ como soporte. En otras palabras, el conjunto *P* de todas las distribuciones simples de probabilidad sobre un conjunto no vacío *X* es convexo.

*Demostración:* Sean *p* y *q* distribuciones simples de probabilidad sobre *X* y sea $r = \alpha p + (1-\alpha) q$ la combinación convexa de *p* y *q* $(0 \le \alpha \le 1)$. Sea $T = sop(p) \cup sop(q)$. Claramente, *T* es un subconjunto finito de *X*. Si $x \in T, p(x) > 0$ o $q(x) > 0$. Si $\alpha = 0, r(x) = q(x) > 0$. Si $\alpha = 1, r(x) = p(x) > 0$. En cualquier otro caso, $\alpha p(x) > 0$ y , $(1-\alpha) q(x) > 0$ de manera que $r(x) = \alpha p(x) + (1-\alpha) q(x) > 0$. □

Al establecer la convexidad del conjunto de las distribuciones simples de probabilidad sobre un conjunto *X*, el lema 2 nos permite introducir la siguiente definición.

*DEFINICIÓN 5* $\mathfrak{A}$ es una *estructura de Von Neumann-Morgenstern* syss existen *X, P* y $\succ$ y tales que

(0) $\mathfrak{A} = \langle X, P, \succ \rangle$;
(1) $X$ es un conjunto no vacío;
(2) $P$ es el conjunto de las distribuciones simples de probabilidad sobre $X$;
(3) $\langle P, \succ \rangle$ es una estructura de preferencia estricta; es decir, $\succ$ es asimétrica y negativamente transitiva sobre $P$;
(4) para todo $p, q \in P$ con $p \succ q$ y $\alpha \in (0,1)$: si $r \in P$ entonces $\alpha p + (1-\alpha) r \succ \alpha q + (1-\alpha) r$;
(5) si *p, q* y *r* son elementos de $P$ tales que $p \succ q \succ r$, entonces existen $\alpha, \beta \in (0,1)$ tales que $\alpha p + (1-\alpha) r \succ q \succ \beta p + (1-\beta) r$;
(6) existen al menos dos elementos $p, q \in P$ tales que $p \succ q$ .

Los elementos de $P$ son llamados *loterías*. Para cualquier $x \in X, \delta_x$ es la lotería que asigna el premio $x$ con probabilidad 1. Si existe un premio $b$ máximamente preferido en $X$ y uno mínimamente preferido $w, \delta_b$ es la lotería máximamente preferida y $\delta_w$ la menos deseable. En tal caso se tiene, para cualquier $p \in P, \delta_b \succsim p \succsim \delta_w$. $\delta_b$ y $\delta_w$ son llamadas las *loterías extremas* y cualquier combinación convexa de ellas una *combinación extrema*. En todo caso, el axioma 6 de la definición 5 garantiza que la estructura es no trivial al exigir que haya al menos dos loterías que no sean indiferentes entre sí.

*LEMA 3* Para todo $p, q \in P$ con $p \succ q$ y todo $\alpha, \beta \in (0,1): \alpha p + (1-\alpha) q \succ \beta p + (1-\beta) q$ syss $\alpha > \beta$.

*Demostración:* Supóngase que $\alpha > \beta$ y sea $\gamma = \beta / \alpha$. Claramente, $0 \leq \gamma \leq 1$ y tenemos, dado que $p \succ q$,

(1) $$p = (1-\gamma) p + \gamma p$$

$$\succ (1-\gamma) q + \gamma p \quad \text{por el axioma 4 de la def. 5}$$

$$= \gamma p + (1-\gamma) q \,.$$

Por ende, por el mismo axioma,

(2) $$\alpha p + (1-\alpha) q \succ \alpha [\gamma p + (1-\gamma) q] + (1-\alpha) q$$

$$= \alpha\gamma p + \alpha(1-\gamma)q + (1-\alpha)q$$

$$= \alpha\gamma p + \alpha q - \alpha\gamma q + q - \alpha q$$

$$= \alpha\gamma p + (1-\alpha\gamma)q$$

$$= \beta p + (1-\beta)q.$$

Supóngase ahora que $\alpha p + (1-\alpha)q \succ \beta p + (1-\beta)q$. Si $\beta = \alpha$,

(3) $$\alpha p + (1-\alpha)q = \beta p + (1-\beta)q;$$

si $\beta > \alpha$, por virtud del primer resultado,

(4) $$\alpha p + (1-\alpha)q \succ \beta p + (1-\beta)q$$
$$\succ \alpha p + (1-\alpha)q.$$

En ambos casos contradiciendo la asimetría de $\succ$.□

*LEMA 4 Para toda* $p,q,r \in P$: si $p \succsim r \succsim q$, *existe precisamente un* $\alpha \in [0,1]$ *tal que* $r \sim \alpha p + (1-\alpha)q$.

*Demostración:* Si $r \sim p$, la aserción vale con α = 1; si $r \sim q$, escójase α = 0. Sean, pues, $p \succ r \succ q, \overline{B} = \{\beta \in [0,1] \| \beta p + (1-\beta)q \succ r\}$, y $\underline{B} = \{\beta \in [0,1] \| r \succ \beta p + (1-\beta)q\}$. Nótese que estos conjuntos son no vacíos por el axioma 5 de la definición 5. Mostraremos que $\alpha = inf\overline{B} = sup\underline{B}$ no es elemento ni de $\overline{B}$ ni de $\underline{B}$. Esto implica que $r \sim \alpha p + (1-\alpha)q$, pues de lo contrario tendríamos $\alpha p + (1-\alpha)q \succ r$ *o* $r \succ \alpha p + (1-\alpha)q$, siendo que lo primero implica α ∈ $\overline{B}$ y lo segundo α ∈ $\underline{B}$.

Sea $\beta$, pues, cualquier elemento de $\overline{B}$, de modo que $\beta p + (1-\beta)q \succ r \succ q$.

Por el axioma 5 de la definición 5, existe un $\gamma \in (0,1)$ tal que

(5) $$\gamma[\beta p + (1-\beta)q] + (1-\gamma)q \succ r.$$

Sea $\beta' = \beta\gamma$. Como $\gamma > 0$, tenemos que $\beta' \in [0,1]$; como $\gamma < 1, \beta' < \beta$.

Además,

(6) $$\beta' p + (1-\beta')q = \gamma[\beta p + (1-\beta)q] + (1-\gamma)q \succ r,$$

de modo que $\beta' \in \overline{B}$. Esto muestra que para todo elemento de $\overline{B}$ siempre existe uno más pequeño que también está en $\overline{B}$. Un argumento análogo muestra que para todo $\beta \in \underline{B}$ siempre existe un $\beta'$ mayor que también está en $\underline{B}$.□

Por virtud del lema 4, cada $p \in P$ es indiferente precisamente a una combinación extrema. En lo subsiguiente, $\varphi : P \to P$ será la función que asigna a cada $p \in P$ la combinación extrema $\varphi(p)$ que es indiferente a *p*.

*LEMA 5* Para todo $p, q \in P$ y $\alpha \in [0,1] : \alpha p + (1-\alpha) q \sim \alpha\varphi(p) + (1-\alpha)\varphi(q)$.

*Demostración:* Sea $f : [0.1] \to [0,1]$ la función definida por la siguiente condición:

(7) $f(\alpha) = \alpha'$ syss $\alpha p + (1-\alpha) q \sim \alpha'\varphi(p) + (1-\alpha')\varphi(q)$.

Claramente, $f(1) = 1, f(0) = 0$ y $f$ es creciente en [0,1]; es decir, $a > \beta$ implica $f(\alpha) > f(\beta)$ para todo $\alpha, \beta \in [0,1]$. En efecto, si $\alpha > \beta, \alpha p + (1-\alpha) q \sim \alpha'\varphi(p) + (1-\alpha')\varphi(q)$ y $\beta p + (1-\beta) q \sim \beta'\varphi(p) + (1-\beta')\varphi(q)$, entonces, por el lema 3,

(8)
$$\begin{aligned} \alpha'\varphi(p) + (1-\alpha')\varphi(q) &\sim \alpha p + (1-\alpha) q \\ &\succ \beta p + (1-\beta) q \\ &\sim \beta'\varphi(p) + (1-\beta')\varphi(q) \end{aligned}$$

lo cual implica, nuevamente por el lema 3, $f(\alpha) = \alpha' > \beta' = f(\beta)$.

Para un α arbitrario, pero fijo, consideremos sendas secuencias convergentes de puntos de [0,1]. Una, $(\overline{\gamma}_k)$ decreciente y aproximándose a α como límite por arriba (o sea, $\alpha < \overline{\gamma}_k$ para todo *k);* la otra, $(\underline{\gamma}_k)$ creciente y aproximándose a α por abajo (o sea, $\overline{\gamma}_k < \alpha$ para todo *k*). Consideremos ahora las secuencias de intervalos

$$[\overline{\gamma}_k, \alpha], [\alpha, \underline{\gamma}_k]$$

Como cualquiera de estos subintervalos es un retículo completamente ordenado y completo (con respecto a la relación de orden usual entre números reales), y *f* es creciente, el teorema de Tarski (1957) implica que en cada uno de estos intervalos hay puntos fijos

$$\bar{\alpha}_k \in \left[\bar{\gamma}_k, \alpha\right], \quad \underline{\alpha}_k \in \left[\alpha, \underline{\gamma}_k\right];$$

es decir, puntos tales que $\bar{\alpha}_k = f\left(\bar{\alpha}_k\right)$ y $\underline{\alpha}_k = f\left(\underline{\alpha}_k\right)$. Luego, para estos puntos,

(9) $$\bar{\alpha}_k p + \left(1 - \bar{\alpha}_k\right) q \sim \bar{\alpha}_k \varphi\left(p\right) + \left(1 - \bar{\alpha}_k\right) \varphi\left(q\right)$$

y

(10) $$\underline{\alpha}_k p + \left(1 - \underline{\alpha}_k\right) q \sim \underline{\alpha}_k \varphi\left(p\right) + \left(1 - \underline{\alpha}_k\right) \varphi\left(q\right).$$

Si α es $\bar{\alpha}_k$ *o* $\underline{\alpha}_k$ para algún *k*, ya terminamos. De lo contrario, considérense los intervalos

(11) $$I_k \equiv \left\{ r \in P \middle| \bar{\alpha}_k p + \left(1 - \bar{\alpha}_k\right) q \succ r \succ \underline{\alpha}_k p + \left(1 - \underline{\alpha}_k\right) q \right\}$$

y

(12) $$J_k \equiv \left\{ r \in P \middle| \bar{\alpha}_k \varphi\left(p\right) + \left(1 - \bar{\alpha}_k\right) \varphi\left(q\right) \succ r \succ \underline{\alpha}_k \varphi\left(p\right) + \left(1 - \underline{\alpha}_k\right) \varphi\left(q\right) \right\}.$$

Sean $I \equiv \cap_{k<w} I_k$ *y* $J \equiv \cap_{k<w} J_k$. Es fácil ver que *I* es no vacío, ya que al menos $\alpha p + (1-\alpha) q$ está en *I*. Análogamente, *J* tampoco es vacío porque al menos $\alpha\varphi\left(p\right) + (1-\alpha)\varphi\left(q\right)$ es elemento de *J*. Además, tanto *I* como *J* son clases de indiferencia. En efecto, si r ∈ *I* tenemos, para cualquier *k*,

(13) $$\bar{\alpha}_k p + \left(1 - \bar{\alpha}_k\right) q \succ r \succ \underline{\alpha}_k p + \left(1 - \underline{\alpha}_k\right) q$$

Por lo tanto, por el lema 4, existe precisamente un $\beta_k$ tal que

(14) $$r \sim \beta_k \left[\bar{\alpha}_k p + \left(1 - \bar{\alpha}_k\right) q\right] + \left(1 - \beta_k\right)\left[\underline{\alpha}_k p + \left(1 - \underline{\alpha}_k\right) q\right].$$

Sea $\theta_k = \beta_k \bar{\alpha}_k + \left(1 - \beta_k\right) \underline{\alpha}_k$. Luego,

(15) $$r \sim \theta_k p + \left(1 - \theta_k\right) q.$$

Si $r \nsim \alpha p + (1-\alpha) q$, tenemos dos posibles casos: (i) $r \succ \alpha p + (1-\alpha) q$ o (ii) $r \prec \alpha p + (1-\alpha) q$. En el primer caso, por virtud del lema 3, tenemos $\theta_k > \alpha$; en el segundo, $\theta_k < \alpha$. Así, o bien existe un $n > 0$ tal que $\theta_k > \bar{\alpha}_l$ para toda $l > n$; o bien existe un $n > 0$

tal que $\theta_k < \underline{\alpha}_l$ para toda $l > n$. En el primer caso tenemos, para cualquiera de esos $l$,

(16) $$r \sim \theta_k p + (1-\theta_k) q \succ \bar{\alpha}_l p + (1-\bar{\alpha}_l) q \succ r.$$

En el segundo caso tenemos

(17) $$r \succ \underline{\alpha}_l p + (1-\underline{\alpha}_l) q \succ \theta_k p + (1-\theta_k) q \sim r.$$

Por consiguiente, $r \sim \alpha p + (1-\alpha) q$.

Un argumento análogo muestra que

(18) $$J = \{ r \in P | r \sim \alpha\varphi(p) + (1-\alpha)\varphi(q) \}.$$

Sin embargo, $I = J$ porque $I_k = J_k$ para todo $k$, de manera que

(19) $$\alpha p + (1-\alpha) q \sim \alpha\varphi(p) + (1-\alpha)\varphi(q). \square$$

*LEMA 6* Si $p,q,r \in P, \alpha \in [0,1]$ y $p \sim q$ entonces $\alpha p + (1-\alpha)$ $r \sim \alpha q + (1-\alpha) r$ .

*Demostración:* Si $p \sim q$, $\varphi(q) = \varphi(p)$ y, por el lema 5,

(20) $$\varphi[\alpha p + (1-\alpha) r] \sim \alpha\varphi(p) + (1-\alpha)\varphi(r) = \alpha\varphi(q) + (1-\alpha)$$
$$\varphi(r) \sim \varphi[\alpha q + (1-\alpha) r]$$

de donde se sigue que

(21) $$\alpha p + (1-\alpha) r \sim \alpha q + (1-\alpha) r. \square$$

Para cada premio $x \in X$, sea *u(x)* el número en [0,1] tal que

(22) $$\delta_x \sim u(x)\delta_b + (1-u(x))\delta_w .$$

Sea $u : x \to \mathbb{R}$ la función definida por esta condición. Está claro que la utilidad del premio $x$ no es más que el número α tal que

(23) $$\delta_x \sim \alpha\delta_b + (1-\alpha)\delta_w .$$

Si no hubiere un premio mejor, o uno peor, o ambas cosas; o si tomáramos otras loterías como punto de referencia para definir la utilidad de los premios, habría que ampliar la definición del siguiente modo.

*DEFINICIÓN 6* Sean $\delta_b$ y $\delta_w$ loterías cualesquiera, con $\delta_b \succ \delta_w$. Hacemos $u(b)=1$ y $u(w)=0$. Para cualquier $x \in X$, si $\delta_b \succ \delta_x \succ \delta_w$, hacemos $u(x) = \alpha$ si

(24) $$\delta_b \sim \alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_w .$$

Si $\delta_x \succ \delta_b$, sabemos por el lema 4 que existe precisamente un $\alpha \in (0,1)$ tal que

(25) $$\delta_b \sim \alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_w .$$

En este caso hacemos $u(x) = 1/\alpha$. Finalmente, si $\delta_w \succ \delta_x$, también por el lema 4 sabemos que existe un $\alpha \in (0,1)$ tal que

(26) $$\delta_w \sim \alpha\delta_b + (1-\alpha)\delta_x .$$

En este caso hacemos $u(x) = -\alpha/(1-\alpha)$. De este modo queda definida la *función de utilidad* $u : X \to \mathbb{R}$.

Como en la aplicación que nos concierne es razonable suponer que siempre hay un premio máximo y uno mínimo (pues ni las ganancias ni las pérdidas financieras pueden ser infinitas), habré de restringir las demostraciones subsecuentes al caso en que existen un premio mejor y uno peor.

*LEMA 7 Para todo $p \in P$, p es indiferente a la lotería que da el premio b con probabilidad $\sum_{x\in sop(p)} u(x)\,p(x)$ y el premio w con probabilidad $1-\sum_{x\in sop(p)} u(x)\,p(x)$.*

*Demostración*: La demostración es por inducción sobre la cardinalidad de *sop(p)*. Si $sop(p)=\{x\}, p(x)=1=\delta_x(x)$ y

(27) $$u(x) = u(x)\delta_x(x) = \sum_{x\in sop(p)} u(x)\,p(x).$$

Luego,

$$(28)\quad p=\delta_x$$

$$\sim u(x)\delta_b+(1-u(x))\delta_w$$

$$=\left(\sum_{x\in sop(p)}u(x)\,p(x)\right)\delta_b+\left(1-\sum_{x\in sop(p)}u(x)\,p(x)\right)\delta_w.$$

Sea ahora $sop(p)=\{x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}\}$ y sea

$$(29)\qquad \alpha=\sum_{k=1}^{n}p(x_k).$$

Defínase la función

$$p_1:\{x_1,\ldots,x_n\}\to[0,1]$$

por la condición

$$(30)\qquad p_1(x_k)=\alpha^{-1}p(x_k)\quad k=1,\ldots,n.$$

Entonces $p_1$ es un nueva distribución simple de probabilidad sobre $X$ con soporte $\{x_1,\ldots,x_n\}$. De hecho, $p=\alpha p_1+(1-\alpha)\delta_{x_{n+1}}$ y tenemos, por el lema 5,

$$(31)\qquad \varphi(p)=\alpha\varphi(p_1)+(1-\alpha)\varphi\left(\delta_{x_{n+1}}\right)$$

Supóngase, como hipótesis inductiva, que

$$(32)\qquad \varphi(p_1)=\left(\sum_{k=1}^{n}u(x_k)\,p_1(x_k)\right)\delta_b+\left(1-\sum_{k=1}^{n}u(x_k)\,p_1(x_k)\right)\delta_w;$$

y además ya habíamos probado que

$$(33)\qquad \varphi\left(\delta_{x_{n+1}}\right)=\left(u(x)\delta_{x_{n+1}}(x_{n+1})\right)\delta_b+\left(1-u(x)\delta_{x_{n+1}}(x_{n+1})\right)\delta_w.$$

Sean $\kappa=\sum_{k=1}^{n}u(x_k)\,p_1(x_k)$ $y$ $\lambda=u(x)\delta_{x_{n+1}}(x_{n+1})$. Entonces

$$(34)\qquad \varphi(p)=\alpha\left[\kappa\delta_b+(1-\kappa)\delta_w\right]+(1-\alpha)\left[\lambda\delta_b+(1-\lambda)\delta_w\right]$$

$$=\left[\alpha\kappa+(1-\alpha)\lambda\right]\delta_b+\left[\alpha(1-\kappa)+(1-\alpha)(1-\lambda)\right]\delta_w$$
$$=\left[\alpha\kappa+(1-\alpha)\lambda\right]\delta_b+\left[1-\left(\alpha\kappa+(1-\alpha)\right)\lambda\right]\delta_w.$$

Ahora bien,

(35) $$\alpha\kappa+(1-\alpha)\lambda=\alpha\sum_{k=1}^{n}u\left(x_k\right)p_1\left(x_k\right)+(1-\alpha)u(x)\delta_{x_{n+1}}\left(x_{n+1}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}u\left(x_k\right)\left(\alpha p_1\left(x_k\right)\right)+u(x)\left((1-\alpha)\delta_{x_{n+1}}\left(x_{n+1}\right)\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}u\left(x_k\right)p\left(x_k\right).\ \square$$

El siguiente es el resultado principal de este trabajo.

*TEOREMA 1 (TEOREMA DE REPRESENTACIÓN) Sea* $\left\langle X,P,\succ\right\rangle$ *una estructura de Von Neumann-Morgenstern. Entonces existe una función* $u:X\to\mathbb{R}$ *tal que*

(36) $$p\succ q \text{ syss } \sum_{x\in sop(p)}u(x)p(x)>\sum_{y\in sop(q)}u(y)p(y).$$

*Si u' es cualquier otra función tal, entonces existen constantes* $\alpha>0$ *y* $\beta$ *tales que* $u'=\alpha u+\beta$.

*Demostración:* La función *u* arriba definida satisface esta condición. En efecto, como

(37) $$p\sim\left(\sum_{x\in sop(p)}u(x)p(x)\right)\delta_b+\left(1-\sum_{x\in sop(p)}u(x)p(x)\right)\delta_w$$

y

(38) $$q\sim\left(\sum_{y\in sop(q)}u(y)p(y)\right)\delta_b+\left(1-\sum_{y\in sop(p)}u(y)q(y)\right)\delta_w$$

la equivalencia se sigue inmediatamente por el lema 3.

Si $u'$ es otra función que satisface el enunciado del teorema de representación, sea $\beta = u'(w)$ y sea α el número tal que

(39) $$u'(b) - \beta = u'(b) - u'(w) = \alpha\left[u(b) - u(w)\right] = \alpha.$$

Como $u'(b) - u'(w) > 0$, $\alpha > 0$; además, $u'(b) - \beta = \alpha$ y tenemos que

(40) $$u'(b) = \alpha + \beta = \alpha u(b) + \beta \text{ y } u'(w) = \beta = \alpha u(w) + \beta.$$

Mas en general, si $u(x) = \lambda$,

(41) $$\delta_x \sim \lambda\delta_b + (1-\lambda)\delta_w \equiv p$$

y

(42) $$\begin{aligned} u'(x) &= u'(x)\delta_x(x) \\ &= \sum_{y \in sop(p)} u'(y)\,p(y) \\ &= u'(b)\left[\lambda\delta_b + (1-\lambda)\delta_w\right](b) \\ &+ u'(w)\left[\lambda\delta_b + (1-\lambda)\delta_w\right](w) \\ &= \lambda(\alpha + \beta) + (1-\lambda)\beta \\ &= \alpha\lambda + \beta = \alpha u(x) + \beta. \ \square \end{aligned}$$

*TEOREMA 2 Para todo* $x, y \in X : \delta_x \succ \delta_y$ *siempre que* $x > y$ *syss* $u$ *es estrictamente creciente.*

*Demostración:* Supóngase que $\delta_x \succ \delta_y$ y que $x > y$. Entonces

(43) $$u(x)\delta_b + (1-u(x))\delta_w \sim \delta_x \succ \delta_y \sim u(y)\delta_b + (1-u(y))\delta_w,$$

de modo que $u(x) > u(y)$ por el lema 3.

Supóngase ahora que $u$ es estrictamente creciente y que $x > y$. Entonces $u(x) > u(y)$ y tenemos, nuevamente por el lema 3,

(44) $$\delta_x \sim u(x)\delta_b + (1-u(x))\delta_w \succ u(y)\delta_b + (1-u(y))\delta_w \sim \delta_y. \square$$

Una vez que hemos demostrado su existencia, podemos definir el valor esperado de cualquier lotería.

*DEFINICIÓN 7* El valor esperado de la lotería *p, E(p),* se define como

$$\sum_{x\in sop(p)} u(x)\, p(x).$$

## ■ *Teoría clásica de las finanzas*

De aquí en adelante vamos a aplicar a las finanzas la teoría desarrollada hasta el momento. El conjunto *X* será concebido ahora como un intervalo de cantidades de dinero (intervalo cerrado de números reales), con una cantidad máxima *b* y una mínima *w*. Como *X* es convexo, *X* es cerrado bajo combinaciones convexas finitas; es decir, si $x_1,\ldots,x_n$ son cantidades de dinero y $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ son números entre 0 y 1 tales que $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = 1$, entonces $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k \in X$.[2] En particular, si *p* es una lotería cualquiera, y normalizamos la función de utilidad de manera que sus valores sean elementos de *X*, la suma $\sum_{x\in sop(p)} u(x)p(x)$ *es* una combinación convexa de puntos de *X* y, por lo tanto, también es un elemento de *X*, de manera que $E(p)\in X$ para toda lotería *p*. Así, la lotería $\delta_{E(p)}$ es la lotería que asigna probabilidad uno al premio $E(p)=\sum_{x\in sop(p)} u(x)\, p(x)$.

Es posible indagar si el agente prefiere recibir con seguridad la cantidad de dinero $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k$ a obtener una de las cantidades $x_k$ con probabilidad $\alpha_k$. Por ejemplo, es posible indagar si prefiere recibir $190.00 en vez del derecho a participar en una lotería en la que puede recibir $1,000.00, con probabilidad de 0.1, o $1.00 con probabilidad de 0.9. Si prefiere tomar los $190.00 en vez de entrar al sorteo, diremos que tiene aversión al riesgo. Esto motiva la definición de agente averso al riesgo en términos de preferencias sobre ciertas loterías; a saber, entre $\delta_{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k}$

2 Cfr. Nikaido 1968, teorema 2.1, p 17.

y la lotería combinada $p = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_{x_k}$. Con esta motivación introducimos formalmente la siguiente definición.

*DEFINICIÓN* 8 La relación de preferencia $\succ$ es aversa al riesgo syss, para toda combinación convexa $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ de puntos de *X*,

(45) $$\delta_{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k} \succ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_{x_k}.$$

$\succ$ es *propensa al riesgo syss,* para toda combinación convexa $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ de puntos de *X*,

(46) $$\delta_{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k} \prec \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_{x_k}.$$

Es *neutral al riesgo* syss, no es ni aversa ni propensa al riesgo.

La aversión al riesgo está asociada con una característica de la función de utilidad que se conoce como "concavidad". Recuérdese que una función *u* es *estrictamente cóncava* syss $u(\alpha x) + (1 - \alpha x') > \alpha u(x)$ $+ (1 - \alpha) u(x')$ siempre que $x \neq x'$. Tenemos el siguiente resultado.

*TEOREMA 3 La relación de preferencia $\succ$ es aversa al riesgo syss, la función de utilidad u es estrictamente cóncava.*

*Demostración:* Supóngase que $\succ$ es aversa al riesgo y considérese la combinación $\alpha x + (1 - \alpha) x', x \neq x'$. Por hipótesis,

(47) $$\delta_{\alpha x + (1-\alpha) x'} \succ \alpha \delta_x + (1 - \alpha) \delta_{x'}.$$

Luego, por el teorema de representación,

(48) $$\begin{aligned} u(\alpha x + (1 - \alpha) x') &= E\left[\delta_{\alpha x + (1-\alpha) x'}\right] \\ &> E\left[\alpha \delta_x + (1 - \alpha) \delta_{x'}\right] \\ &= \alpha E(\delta_x) + (1 - \alpha) E(\delta_{x'}) = \alpha u(x) + (1 - \alpha) u(x'). \end{aligned}$$

Supóngase ahora que *u* es estrictamente cóncava y recuérdese Takayama (1985:69) que ello implica, para toda $n < \omega$ y conjunto de números positivos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, que

(49)
$$u\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u\left(x_k\right).$$

Luego,

(50)
$$E\left(\delta_{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k}\right)=u\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right)$$
$$>\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u\left(x_k\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k E\left(\delta_{x_k}\right)$$
$$=E\left[\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \delta_{x_k}\right].$$

De aquí se desprende, nuevamente por el teorema de representación, que

(51)
$$\delta_{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k}\succ\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \delta_{x_k}.\square$$

La consecuencia metodológica de este resultado es que si el administrador financiero percibe que su cliente es averso al riesgo, entonces debe utilizar una función de utilidad cóncava para modelar sus preferencias.

Puede resultar útil saber que el grado de disposición a jugar cualquier lotería podría medirse en términos de ganancias seguras si cada lotería tuviese un equivalente cierto en el siguiente sentido.

*DEFINICIÓN 9 Un equivalente cierto* de una lotería *p* es todo premio *x* tal que $\delta_x \sim p$ .

Si cierta condición es satisfecha, es posible garantizar que toda lotería tiene un único equivalente cierto.

*TEOREMA 4 Si X es un intervalo de* $\mathbb{R}$ *, y u es continua, entonces toda lotería p tiene por lo menos un equivalente cierto. Si u es estrictamente creciente, toda p tiene como máximo un equivalente cierto.*

*Demostración:* Supóngase que *u* es continua en *X*. Como *X* es un intervalo cerrado, la imagen de *X*, que es *X* mismo, también lo es. Como

*E(p)* es una combinación convexa de puntos de $X, E(p) \in X$. Por lo tanto, hay un punto *x* en *X* tal que $u(x) = E(p)$. Así, $E(\delta_x) = u(x) = E(p)$ de donde se deduce que $\delta_x \sim p$. Es obvio que si *u* es estrictamente creciente sólo puede haber un equivalente cierto.□

Un obvio corolario de este teorema es que si $\succ$ es aversa al riesgo, entonces cada lotería tiene precisamente un equivalente cierto.

## ■ *Aplicaciones de la teoría*

La TF modela las carteras como loterías y propone la regla de maximizar la utilidad esperada para la toma de decisiones financieras. Más concretamente, supóngase que el agente está frente a una situación típica: Hay en el mercado de activos financieros un bono con tasa de rendimiento fija *r* y con un precio en el momento inicial (tiempo $t = 0$) de $p_{b_0}$. Hay también μ acciones de empresas $a = 1, \ldots,$ que ofrecen rendimientos que dependen de las circunstancias que prevalezcan (“estados de la naturaleza”). Puede haber *v* estados de la naturaleza $s = 1, \ldots, v$. Cada acción *a* ofrece un vector de pagos posibles $(x_{a_1}, \ldots, x_{\alpha_v})$ siendo el pago $a_s$ el que ofrece la acción *a* si ocurre el estado *s*.

La probabilidad de que el pago $a_s$ tenga lugar, pues, es igual a la probabilidad $\pi_s$ de que ocurra el estado de la naturaleza *s*. El precio inicial (en $t = 0$) de la acción *a* es $p_{b_0}$, de manera que el vector de precios en el tiempo $t = 0$ es $p_0 = (p_{1_0}, \ldots, p_{v_0}, p_{b_0})$. Un portafolio se modela como un vector de bonos y acciones $z = (z_a, z_b)$ donde

(52) $$z_a = (z_1, \ldots, z \quad).$$

Suponemos que el agente posee una cierta cantidad de dinero $w_0$ que está dispuesto a invertir. Su problema es elegir la cartera que le brinde los máximos beneficios a su inversión. Con esta suma de dinero, el agente puede adquirir cualquier cartera en el conjunto factible

(53) $$F = \{z \mid pz \leq w_o\}.$$

Si el agente adquiriera la cartera $z = (z_a, z_b) \in F$ y tuviera lugar el estado *s*, recibiría como pago la suma

$$w_s = x_{1_s} z_1 + \cdots + x_{\ _s} z \ + (1+r)\, p_{b_0} z_b. \tag{54}$$

Esto implica que hay una lotería $q$ sobre $X$ tal que

$$sop(q) = \{w_1, \ldots, w_v\} \ y \ q(w_s) = \pi_s.$$

Por lo tanto, la función objetivo del problema es

$$E(q) = \sum_{y \in sop(q)} u(y) q(y) = \sum_{s=1}^{v} u(w_s) \pi_s. \tag{55}$$

La regla de racionalidad que propone la TF a los administradores financieros es la siguiente: elíjase aquella cartera que resuelva el siguiente programa:

$$Maximizar_z \sum_{s=1}^{v} u(w_s) \pi_s$$

sujeto a $z \in F$.

Si el administrador elige una función de utilidad cóncava (lo cual usualmente deberá ser el caso, pues los agentes tienden a ser aversos al riesgo), este problema se resuelve con el método de los lagrangianos, mediante la resolución de condiciones de primer orden.

## ■ *Bibliografía*


Luce, R. D y H. Raiffa (1957). *Games and Decisions,* Wiley, Nueva York.

Nikaido, H. (1968). *Convex Structures and Economic Theory,* Academic Press, Nueva York.

Takayama, A. (1985). *Mathematical Economics,* Cambridge University Press, Cambridge.

Tarski, A. (1957). *"A Lattice-Theoretical Fixpoint Theorem and its Applications",* Pacific Journal of Mathematics, vol. 5, pp. 285–309.

Von Neumann, J. y O. Morgenstern (1947). *Theory of Games and Economic Behavior,* Princeton University Press, Princeton, Mass.