Un modelo estocástico de equilibrio general para valuar derivados y bonos

Francisco Venegas-Martínez[1]

- **Resumen:** En este trabajo se desarrolla un modelo de equilibrio general en una economía con agentes idénticos. Estos agentes son racionales y toman decisiones de portafolio y consumo. Bajo los supuestos de que existe una acción cuyo precio es conducido por un movimiento geométrico Browniano y la tecnología es guiada por un proceso estacionario Markoviano con reversión a la media, se determinan en el equilibrio los precios de un derivado sobre la acción y un bono cupón cero.

- **Abstract:** This paper is aimed at developing a general equilibrium model in an economy populated by identical agents. These agents are rational and make decisions on portfolio and consumption. Under the assumptions that exists a share whose price is driven by a geometric Brownian motion and the technology is guided by a stationary Markovian process with mean reversion, the prices of a derivative on a share and a zero coupon bond are obtained in the equilibrium.

- **Clasificación JEL:** D50, D91, G11.

- **Palabras clave:** Equilibrio general, Consumidor racional, Derivados, Bonos cupón cero.

- *Introducción*

En los últimos años, la economía mundial, en su proceso de integración financiera, ha experimentado una serie de cambios y transformaciones profundas que han impactado tanto la forma de llevar a cabo el análisis económico, como el diseño mismo de la política económica. Estos cambios han abierto nuevos paradigmas que resaltan la exposición de los agentes a diferentes tipos de riesgos financieros.

Mucho se ha aprendido en los últimos años sobre los productos derivados financieros, sobre todo de los que tienen como subyacentes créditos hipotecarios o divisas, pero mucho queda todavía por aprender sobre sus

1 Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional. Correo electrónico: fvenegas1111@yahoo.com.mx

efectos en las economías en los ámbitos local y global. Es importante destacar que los mercados de derivados no originaron la crisis de 2008, sólo la exacerbaron al generar una **burbuja especulativa**. Es también necesario aclarar que los derivados financieros no son armas de destrucción masiva ni instrumentos financieros tóxicos para las economías, simplemente, y como en todo mercado, hay perdedores y ganadores. La gran diferencia con otros mercados es la magnitud colosal de las apuestas.

La determinación de los precios de diferentes activos (subyacentes y derivados) ha sido un tema de gran relevancia en los últimos años; algunas investigaciones al respecto son, por ejemplo: Cox, Ingersoll y Ross (1985a), Grinols y Turnovsky (1993), Schmedders (1998) y Venegas-Martínez (2001), (2006) y (2006b), entre otros. Asimismo, se encuentran en la literatura diversos trabajos para valuar bonos; por ejemplo: Cox, Ingersoll y Ross (1985b), Longstaff (1989), Venegas-Martínez y González-Aréchiga (2002) y Lee y Li (2005).

En el presente trabajo se desarrolla un modelo de equilibrio general en una economía poblada por agentes idénticos que toman decisiones de consumo y portafolio. En la economía existen tres activos, en términos reales: acciones, contratos derivados sobre dichas acciones y un bono libre de riesgo de incumplimiento. Bajo el supuesto de que el precio del título accionario es conducido por un movimiento geométrico Browniano y la tecnología es guiada por un proceso Markoviano de difusión, se obtienen en el equilibrio los precios de un derivado sobre una acción y un bono cupón cero. La característica distintiva del modelo propuesto es que produce tasas con dinámicas alternativas a las encontradas en Cox, Ingersoll y Ross (1985b). Asimismo, esta investigación generaliza el modelo de Longstaff (1989).

■ *Supuestos básicos de la economía*

Considere una economía cerrada, la cual está poblada por individuos idénticos, maximizadores de utilidad. La economía produce y consume un solo bien de carácter perecedero. Los consumidores tienen acceso a una acción y un derivado sobre dicha acción. Los precios de estos activos están dados en términos reales.

■ *Activos y sus precios*

Suponga que el precio en términos reales, t, de la acción tiene una dinámica estocástica conducida por el movimiento geométrico Browniano de tal forma que

(1) $$\mathrm{d}S_t = \mu_s S_t \mathrm{d}t + \sigma_s S_t \mathrm{d}U_t,$$

donde el parámetro de tendencia, μ_s, representa el rendimiento medio esperado, el parámetro de volatilidad, σ_s es la variación instantánea del rendimiento del activo y el proceso $\{U_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Wiener definido sobre un espacio fijo de probabilidad (Ω^U, P^U). En lo que sigue, el precio del derivado de la acción se denotará por $v_t = v(S_t, t)$

- *Restricción presupuestal del consumidor*

La riqueza real, x_t, del individuo, en cada instante, está dada por:

(2) $$x_t = S_t + v_t + k_t.$$

Sea $w_{1t} = S_t / x_t$ la proporción de la riqueza que el individuo asigna a la tenencia de acciones, $w_{2t} = v_t / x_t$ la proporción de la riqueza que asigna a un derivado de S_t de precio $v(S_t, t)$, y la proporción complementaria $1 - w_{1t} - w_{2t}$ que destina a la tenencia de capital, k_t. En consecuencia, la evolución de la acumulación de la riqueza real sigue la ecuación diferencial estocástica:

$$\mathrm{d}x_t = x_t w_{1t} \mathrm{d}R_s + x_t w_{2t} \mathrm{d}R_v + x_t \left(1 - w_{1t} - w_{2t}\right) r \mathrm{d}t - c_t \mathrm{d}t$$

donde el rendimiento del activo con riesgo está dado por

(3) $$\mathrm{d}R_s = \frac{\mathrm{d}v_t}{S_t} = \mu_s \mathrm{d}t + \sigma_S \mathrm{d}U_t$$

y el rendimiento de su derivado por

(4) $$\mathrm{d}R_v = \frac{\mathrm{d}v_t}{v_t}.$$

El rendimiento del derivado se obtiene mediante la aplicación del lema de Itô a $v(S_t, t)$,

(5) $$\mathrm{d}v_t = \mu_v v_t \mathrm{d}t + \sigma_v v_t \mathrm{d}U_t$$

De tal forma que la restricción presupuestal se puede escribir como:

(6) $$\mathrm{d}x_t = x_t \left[\left(r + (\mu - r) w_{1t} + (\mu - r) w_{2t} - \frac{c_t}{x_t} \right) \mathrm{d}t + \left(w_{1t}\sigma_S + w_{2t}\sigma_v \right) \mathrm{d}U_t \right]$$

Se requiere especificar un pago al vencimiento del derivado, $v(S_t, T) = g(S_t)$.

- *Posibilidades de producción*

Suponga que el proceso de producción y_t tiene la forma:

$$\mathrm{d}y_t = M(y_t)\mathrm{d}t + N(y_t)\mathrm{d}W_t, \tag{7}$$

donde

$$M(y_t) = k\left(\theta - \sqrt{y_t}\right) \tag{8}$$

y

$$N(y_t) = v\sqrt{y_t}. \tag{9}$$

Las cantidades k, θ y v son constantes positivas y $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad (Ω^W, F^W, P^W) junto con su filtración aumentada $F^W = \{F_t\}_{t\geq 0}$. Suponga también, por simplicidad, que $\mathrm{Cov}(dU_t, dW_t) = 0$.

- *Problema de decisión del consumidor*

Se supone que el consumidor representativo obtiene satisfacción por el consumo de un bien de carácter perecedero. En este caso, la utilidad esperada, V_t, al tiempo t de un individuo representativo, adverso al riesgo y competitivo (tomador de precios) tiene la siguiente forma:

$$V_t \equiv \mathrm{E}\left[\int_t^T \ln\left(c_s\right)e^{-\delta s}\,\mathrm{d}s \,\middle|\, F_t\right], \tag{10}$$

donde c_s es el consumo al tiempo s, δ es la tasa subjetiva de descuento, y_s representa el impacto de la tecnología en la función de utilidad, y F_t es la información relevante disponible hasta el tiempo t. En este caso $F_t \equiv F_t^W \times F_t^U$. Así pues, el consumidor desea determinar la trayectoria de consumo y las proporciones de su riqueza que va a asignar a los activos.

■ *Condiciones de primer orden*

En este caso, la condición de Hamilton-Jacobi-Bellman del problema de control óptimo estocástico de maximización de utilidad, sujeto a la restricción presupuestal, está dada por:

$$0 \equiv \max_{c, \mathrm{w}_{1t}, \mathrm{w}_{2t}} \left\{ \ln(c_s) e^{-\delta s} + J_t + J_t x_t \left(r + (\mu - r) w_{1t} + (\mu_v - r) w_{2t} - \frac{c_t}{x_t} \right) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} J_{xx} x_t^2 \left(w_{1t}\sigma_s + w_{2t}\sigma_v \right)^2 + J_y M(y_t) + \frac{1}{2} J_{yy} N^2(y_t) \right\},$$

donde

(11) $$J(x_t, y_t, t) \equiv \max_{c, \mathrm{w}_{1t}, \mathrm{w}_{2t}} \mathrm{E}\left[\int_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}} \ln(c_s) e^{-\delta s} \, \mathrm{d}s \,\middle|\, F_t \right]$$

es la función de utilidad indirecta y $J_a(x_t, y_t)$ es la variable de co-estado. Si se toma como candidato de solución a $J(x_t, y_t, t) = H(x_t, y_t) e^{-\delta t}$ se tiene que la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman se transforma en

(12) $$0 = \max_{c, \mathrm{w}_{1t}, \mathrm{w}_{2t}} \left\{ \ln(c_s) - \delta H + H_a x_t \left(r + (\mu - r) w_{1t} + (\mu_v - r) w_{2t} - \frac{c_t}{x_t} \right) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} H_{aa} x_t^2 \left(w_{1t}\sigma_s + w_{2t}\sigma_v \right)^2 + H_y M(y_t) + \frac{1}{2} H_{yy} N^2(y_t) \right\}.$$

En este caso, se satisface que $H(x_t, y_t) = g(y_t)\ln(x_t) + f(y_t)$ para algunas funciones $g(y_t)$ y $f(y_t)$. Después de derivar la ecuación (12) con respecto de las variables de control, la condición necesaria sobre el consumo es

(13) $$\frac{1}{c_t} = \frac{g(y_t)}{x_t}$$

y las condiciones de primer orden sobre w_{1t} y w_{2t} son, respectivamente,

(14) $$\mu - r = w_1\sigma_s^2 + w_2\sigma_s\sigma_v$$

y

(15) $$\mu_v - r = w_1\sigma_s\sigma_v + w_2\sigma_v^2.$$

Las dos últimas ecuaciones pueden ser escritas en términos matriciales como:

$$\begin{pmatrix} \mu - r \\ \mu_v - r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu_v \end{pmatrix} - \Pi r = \begin{pmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_s\sigma_v \\ \sigma_s\sigma_v & \sigma_v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

donde $\Pi = (1,1)^T$.

■ *Portafolio de equilibrio*

Considere la solución de esquina dada por $w_1 = 0$ y $w_2 = 0$. En este caso, las condiciones (14) y (15) se transforman, respectivamente, en:

(16) $$\mu - r = \sigma_s^2$$

y

(17) $$\mu - r = \sigma_s\sigma_v.$$

De la última ecuación se sigue que

$$\left(\frac{\partial v_t}{\partial t} + \frac{\partial v_t}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_t}{\partial S_t^2}\sigma_s^2 S_t^2 \right)\frac{1}{v_t} - r = \frac{\partial v_t}{\partial S_t}\sigma_s^2 S_t \frac{1}{v_t}.$$

Si se utiliza ahora la ecuación (16), se obtiene

(18) $$\frac{\partial v_t}{\partial t} + \frac{\partial v_t}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_t}{\partial S_t^2}\sigma_s^2 S_t^2 - r v_t = 0,$$

con la condición

(19) $$v\left(S_t, T\right) = g\left(S_t\right).$$

■ *Un proceso alternativo para la tasa de interés de equilibrio*

A continuación se presenta una fórmula alternativa para la tasa de interés de equilibrio. Observe que a partir de (16), se cumple que

$$r = \mu - \sigma_s^2. \tag{20}$$

En lo que sigue se supone que $\mu > \sigma_s^2$. La tasa de interés de equilibrio satisface

$$r = \left(w_1, w_2\right)\begin{pmatrix} \mu \\ \mu_v \end{pmatrix} = \left(w_1, w_2\right)\begin{pmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_s\sigma_v \\ \sigma_s\sigma_v & \sigma_v^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\frac{aJ_{aa}}{J_a},$$

donde $w_1 = 1$ y $w_2 = 0$. En efecto, es suficiente observar que

$$J_a = e^{-\delta t} g\left(y_t\right)\frac{1}{x_t}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{aJ_{aa}}{J_a} = -1.$$

■ *Dinámica de la tasa corta*

En esta sección, a partir de un proceso para la función de producción, se determina la dinámica estocástica de la tasa corta. Si se definen $\mu = \tilde{\mu} y_t$ y $\sigma_s^2 = \tilde{\sigma}_s^2 y_t$ en (20), se tiene que

$$r_t = \gamma y_t,$$

donde

$$\gamma = \tilde{\mu} - \tilde{\sigma}_s^2.$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{d}r_t = k\gamma^{-1/2}\left(\theta\gamma^{-1/2} - \sqrt{y_t}\right)\mathrm{d}t + \gamma^{-1/2} v\sqrt{r_t}\,\mathrm{d}W_t\,.$$

Sean

$$a = k\gamma^{-1/2}, \qquad b = \theta\gamma^{1/2} \qquad \text{y} \qquad \sigma = \gamma^{-1/2} v.$$

De esta manera,

$$\mathrm{d}r_t = a\left(b - \sqrt{r_t}\right)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r_t}\,\mathrm{d}W_t \tag{21}$$

con *a, b* y σ cantidades positivas. Si se define

$$ab = k\theta = \frac{1}{4}\sigma^2, \tag{22}$$

entonces la ecuación (21) se puede reescribir como

$$\mathrm{d}r_t = \left(\frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{r_t}\right)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r_t}\,\mathrm{d}W_t. \tag{23}$$

- *Valuación de un bono cupón cero*

Considere un mercado en donde los inversionistas compran y emiten promesas de pago de una unidad monetaria en el futuro, libres de riesgo crédito. Estas promesas que se compran a descuento serán llamadas bonos cupón cero. Sea $B(t, T)$ el precio en el tiempo t de un bono que se compra a descuento con vencimiento en el tiempo T, $T > t$, y que paga una unidad monetaria al vencimiento, es decir,

$$B(T, T) = 1. \tag{24}$$

El precio de un bono cupón cero está dado por

$$B(t,T) = \mathrm{E}\left[\exp\left\{-\int_t^T r_s\,\mathrm{d}s\right\} \;\middle|\; F_t^W\right].$$

El rendimiento al vencimiento o estructura de plazos o curva de rendimiento o, simplemente, curva de ceros, en el tiempo t de un bono con vencimiento T, está dada por:

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln B(t,T), \qquad T > t. \tag{25}$$

La tasa corta está descrita a través de una ecuación diferencial estocástica de la forma:

$$\mathrm{d}r_t = \alpha(r_t, t)\mathrm{d}t + \beta(r_t, t)\mathrm{d}W_t, \tag{26}$$

donde $\{W_t\}_{0\le t\le T}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con una filtración (Ω^W, F^W, P^W). De acuerdo con (23), las funciones $\alpha(r_t,t)$ y $\beta(r_t,t)$ están dadas por

$$\alpha(r_t,t) = \frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{r_t} \qquad \text{y} \qquad \beta(r_t,t) = \sigma\sqrt{r_t}.$$

■ *Conclusiones*

Se ha desarrollado un modelo de equilibrio general en una economía estocástica poblada por consumidores-inversionistas idénticos, competitivos y adversos al riesgo para determinar el precio de un derivado y el precio de un bono cupón cero. El modelo propuesto proporciona dinámicas alternativas de equilibrio para la tasa corta a las obtenidas en Cox, Ingersoll y Ross (1985b) y generaliza el modelo de tasa corta de Longstaff (1989). Por último es importante mencionar que el modelo puede ser extendido en varias direcciones: falta incorporar volatilidad estocástica y considerar otras formas funcionales comunes para la función de utilidad.

■ *Bibliografía*

Cox, J., J. Ingersoll y S. Ross (1985a). "An intertemporal general equilibrium model of asset prices", *Econometrica*, 53(2), pp. 385-467.

Cox, J. y S. Ross (1985b). "A theory of the term structure of interest rates", *Econometrica*, 53(2), pp. 385-467.

Grinols, E. L. y S. J. Turnovsky (1993). "Risk, the financial market, and macroeconomic equilibrium", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 17(1-2), pp. 1-36.

Lee, M. y W. Li (2005). "Drift and diffusion function specification for short-term interest rates", *Economic Letters,* 86(3), pp. 339-346.

Longstaff, F. A. (1989). "A nonlinear general equilibrium model of the term structure of interest rates", *Journal of Financial Economics*, 23(2), pp. 195-224.

Schmedders, K. (1998). "Computing equilibria in the general equilibrium model with incomplete asset markets", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 22 (8-9), pp. 1375-1401.

Turnovsky, S. J. (1986). "Short-term and long-term interest rates in a monetary model of a small open economy", *Journal of International Economics*, 20 (3-4), pp. 291-311.

Venegas-Martínez, F. (2001). “Temporary stabilization: a stochastic analysis”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25(9), pp. 1429-1449.

Venegas-Martínez, F. y B. González-Aréchiga (2002). “Cobertura de tasas de interés con futuros del mercado mexicano de derivados: un modelo estocástico de duración y convexidad”, *El Trimestre Económico*, 59(2) No. 274, pp. 227-250.

Venegas-Martínez, F. (2006). “Stochastic Temporary Stabilization: Undiversifiable Devaluation and Income Risks”, *Economic Modelling*, 23(1), pp. 157-173.

Venegas-Martínez, F. (2006a). “Fiscal Policy in a Stochastic Temporary Stabilization Model: Undiversifiable Devaluation Risk”, *Journal of World Economic Review*, 1(1), pp. 87-106.